Mathématiques - Corrections avant DS I

Correction fin Exercice 1 (TD2)
Soit h définie

$$h(x) = \frac{\ln(x-1)}{\ln(x-3)} = \frac{u(x)}{v(x)}$$

On cherche le domaine de définition de la fonction h : h est le quotient des fonctions u et v. Pour déterminer le domaine de définition de h, on doit déterminer **un domaine commun sur lequel u et v sont définies et v non nulle**.

On rappelle que la fonction ln est définie sur $]0, +\infty[$: on a donc

- u est définie pour tout x tels que $x - 1 > 0$
- v est définie pour tout x tels que $x - 3 > 0$

Par conséquent pour trouver un domaine commun sur lequel u et v sont définies : on doit résoudre $x - 1 > 0$ et $x - 3 > 0$.

$$\begin{cases} x-1>0 \\ \text{et} \\ x-3>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>1 \\ \text{et} \\ x>3 \end{cases}$$

On déduit $I =]3, +\infty[$. Il nous reste à résoudre (sur I)

$$v(x) = 0 \iff \ln(x-3) = 0 = \ln(1) \iff x - 3 = 1 \iff x = 4$$

On déduit que h est définie sur $\mathcal{D}_h =]3, 4[\cup]4, +\infty[$.

Correction Exercice 4 (TD2)

Etudier avec soin le domaine de définition de la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 3x - 2} = (g \circ h)(x) = g[h(x)]$$

Ici f est la composée des fonctions g et h avec $h(x) = -x^2 + 3x - 2$ et $g(x) = \sqrt{x}$. D'après le cours, on sait que $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}$ (h est une fonction polynomiale) et $D_g = [0, +\infty[$. D'après la propriété vue en cours,

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathcal{D}_h \text{ tels que } h(x) \in \mathcal{D}_g\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } h(x) \in [0, +\infty[\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } h(x) \geq 0\}$$

On doit donc résoudre l'inéquation $h(x) \geq 0$. On s'occupe d'abord de résoudre

$$-x^2 + 3x - 2 = 0$$

On trouve facilement $\Delta = 1$, l'équation admet deux racines dans $\mathbb{R}$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$. A partir des solutions de l'équation, vous dressez le tableau de signe du polynôme du second degré, il est positif (du signe de $-a$, ici $a = -1 < 0$) entre les racines.....on a donc

$$-x^2 + 3x - 2 \geq 0 \iff x \in [1, 2]$$

Conclusion : $\mathcal{D}_f = [1, 2]$.

Correction Exercice 3 (TD 2) *Des équations avec contraintes, on réfléchit au domaine de définition de l'équation avant de se lancer dans la résolution...*

Résoudre l'équation suivante :
(a) $\ln(x-2) - \ln(3x+1) = 0$.
Ici, il s'agit d'une équation avec contraintes : avant de résoudre, on doit déterminer le domaine de définition de l'équation (encore appelé son domaine d'étude). A cause de la fonction ln cette équation n'est pas définie sur $\mathbb{R}$!

On rappelle que la fonction ln est définie sur $]0, +\infty[$: pour que l'équation existe, il faut et il suffit que $x - 2 > 0$ et $3x + 1 > 0$. On résout

$$\begin{cases} x-2>0 \\ \text{et} \\ 3x+1>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>2 \\ \text{et} \\ x>\dfrac{-1}{3} \end{cases}$$

On en déduit que l'équation est définie sur $I =]2, +\infty[$. On suppose désormais que $x \in I$. Sur I, $x-2>0$ et $3x+1>0$, on a donc

$$\ln(x-2) - \ln(3x+1) = \ln\left(\frac{x-2}{3x+1}\right)$$

$$\ln(x-2) - \ln(3x+1) = 0 \iff \ln\left(\frac{x-2}{3x+1}\right) = \ln(1) \iff \frac{x-2}{3x+1} = 1$$

On rappelle que si $a>0$ et $b>0$, $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$ car la fonction ln est bijective sur $[0, +\infty[$.

$$\frac{x-2}{3x+1} = 1 \iff x-2 = 3x+1 \iff 2x = -3 \iff x = \frac{-3}{2} \notin I$$

Conclusion : l'équation n'admet aucune solution ou encore $\mathcal{S} = \emptyset$.
Remarque : pour la partie résolution, on n'était pas obligé de tranformer la différence des ln en ln du quotient. On pouvait directement se ramener à

$$\ln(x-2) - \ln(3x+1) = 0 \iff \ln(x-2) = \ln(3x+1)$$

Sur I, $x-2>0$ et $3x+1>0$, on peut donc utiliser la propriété

On rappelle que si $a>0$ et $b>0$, $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$ car la fonction ln est bijective sur $[0, +\infty[$ etc....

Correction Exercice 12 Question (d) (TD 3) On veut résoudre géométriquement

$$|\frac{z-3}{z-5}| = 1 \iff \frac{|z-3|}{|z-5|} = 1 \iff |z-3| = |z-5|$$

On introduit un certain nombre de points : soit A d'affixe $z_A = 3$ et B d'affixe $z_B = 5$, enfin M d'affixe z (on cherche l'ensemble des points M).

$$|z-3| = |z-5| \iff AM = BM \iff$$

M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$. L'ensemble géométrique cherché est la médiatrice du segment $[AB]$. Je vous laisse placer les points A et B (dans le plan muni d'un repère orthonormé) et tracer sa médiatrice.

Correction Exercice 4 Partie IV Question 3 (TD 3) On veut montrer que

$$(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7})(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})(1+i) = \sqrt{2}(\cos(\frac{5\pi}{84}) + i\sin(\frac{5\pi}{84}))$$

Dans cette question, il faut penser bien évidemment à travailler avec l'écriture exponentielle au départ. On pose

$$\alpha = \cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7},\ \beta = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \gamma = 1+i$$

On va donner l'écriture exponentielle des nombres : α, β et γ.
$\alpha = \cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7} = e^{i\frac{\pi}{7}}$ (immédiat, application directe du cours). Pour $\beta = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, on calcule $|\beta| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$, ici le module est égal à 1, du coup, on a directement

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \iff \theta = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z$$

On a alors $\beta = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Enfin pour $\gamma = 1 + i$. On calcule facilement $|\gamma| = \sqrt{2}$.

$$\gamma = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}})$$

On déduit alors

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \iff \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z$$

On obtient alors l'écriture exponentielle de γ, $\gamma = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
On a alors

$$\alpha\beta\gamma = e^{i\frac{\pi}{7}} \times e^{-i\frac{\pi}{3}} \times \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{7} - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}e^{i(\frac{3\pi}{21} - \frac{7\pi}{21} + \frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}e^{i(\frac{-4\pi}{21} + \frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}e^{i(\frac{-16\pi}{84} + \frac{21\pi}{84})}$$

On a donc

$$\alpha\beta\gamma = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{84}} = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{5\pi}{84}) + i\sin(\frac{5\pi}{84})\right).$$