Chapitre 9

Équations différentielles linéaires d'ordre 1.

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 1.
Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction souvent notée y en mathématiques, d'ordre 1 car dans l'équation, il apparait la dérivée première de la fonction y et la fonction y elle-même.
Ceci exige, qu'une fonction solution de l'équation soit une fonction dérivable sur une certaine partie I de $\mathbb{R}$.

Résoudre une équation différentielle (en mathématiques) c'est non seulement trouver la (ou les) fonctions y qui sont solutions mais également le domaine de définition de ces fonctions solutions. On cherche généralement un couple (I, y) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et y est une fonction définie sur I qui vérifie l'équation.

Prenons tout d'abord un exemple issu de la physique (électricité).

Exemple 1 Etablissement d'un courant dans un circuit électrique (montage en série) constitué d'un générateur de courant continu, d'une bobine d'induction et d'une résistance ; appliquons la loi d'Ohm à l'instant t aux bornes du générateur :

Voir tableau.

Exemple 2 Soit l'EDL d'ordre 1 (**homogène**) (E) $y'(x) = y(x)$. Il est facile de voir que la fonction $x \mapsto e^x$ est une solution de l'équation ; on montrera que toute solution de (E) s'écrit $y(x) = \lambda e^x$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. On peut remarquer qu'il existe une infinité de solutions à l'équation (E).

Forme d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dans le cas général ?

Définition 1

Toute équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 s'écrit

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$

où

- a et b sont des fonctions continues sur I un intervalle de $\mathbb{R}$, a est non nulle sur I.
- y est la fonction inconnue ; y sera définie sur I.
- L'équation (E_H) $y'(x) = a(x)y(x)$ est appelée l'équation homogène associée à l'EDL d'ordre 1 (E).

1 Forme générale des solutions

On va donner un premier théorème qui donne la forme générale des solutions d'une EDL d'ordre 1, ce théorème est similaire à celui vu dans le cas des EDL d'ordre 2 (chapitre 8).
Il permettra de mettre en place un plan de résolution de ces équations (plan identique à celui des EDL d'ordre 2).

Théorème 1 *Soit* (E) $\;y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$, *une EDL d'ordre 1 où* a *et* b *sont des fonctions continues sur* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$. *La fonction* y *est la fonction inconnue, elle est définie sur* I. *On note* y_P *une solution particulière de* (E), y_P *est définie sur* I.

Alors les fonctions solutions de (E) *s'écrivent*

$$\forall x \in I, \; y(x) = y_H(x) + y_P(x)$$

où y_H *est solution de l'équation homogène associée* (E_H) $\;y'(x) = a(x)y(x)$.

Démonstration du théorème 1 On doit montrer

- que toute fonction de la forme $y = y_H + y_P$ est bien une solution de (E)
- que toute solution y de (E) est de cette forme

La démonstration est laissée à titre d'exercice, vous vous inspirez de celle faite dans le cas des EDL d'ordre 2.

A partir de ce théorème, on déduit un plan pour résoudre de telles équations.

Plan de résolution d'une EDL d'ordre 1 On veut résoudre

$$(E) \; y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$

- Etape 1 On met en évidence l'intervalle de continuité I commun aux fonctions a et b ce qui nous donne le domaine de définition des solutions y. Les fonctions y seront définies sur I.
- Etape 2 On détermine y_H. On résout donc l'équation homogène associée à (E), à savoir
$$(E_H) \;\; y'(x) = a(x)y(x)$$
- Etape 3 On détermine y_P. On doit donc trouver une solution particulière de (E).
- Etape 4 On conclut en utilisant le théorème 1, toutes les solutions de (E) s'écrivent
$$\forall x \in I, \; y(x) = y_H(x) + y_P(x)$$
où I est le domaine de définition des solutions déterminé dans l'étape 1.

Il nous reste donc à apprendre à déterminer y_H et y_P.

Avant d'apprendre à déterminer y_H et y_P, on va donner le théorème d'unicité pour les EDL d'ordre 1 (qui est similaire à celui des EDL d'ordre 2).

2 Problème de Cauchy

On appelle problème de Cauchy (d'ordre 1) la donnée d'une équation différentielle avec condition initiale, par exemple

$$\begin{cases} y'(x) = 2y(x) + e^x \cos(2x) & (E) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

est un problème de Cauchy. Pour le résoudre, on s'occupe d'abord de résoudre, l'équation (E), on détermine toutes les solutions de (E).

Puis en utilisant la condition initiale, on détermine la constante. En effet, on va voir que dans le cas des EDL d'ordre 1, les solutions dépendent d'une seule constante. On trouvera alors l'unique solution du problème de Cauchy. En effet, selon le théorème suivant (admis), un problème de Cauchy (d'ordre 1) admet une solution unique.

Théorème 2 *Théorème de Cauchy-Lipschitz (cas linéaire, ordre 1)*

On considère une EDL d'ordre 1

$$(E)\ y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$

où a et b sont des fonctions continues sur I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Alors pour tout $x_0 \in I$, tout $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution y de l'équation (E) définie sur I et vérifiant $y(x_0) = y_0$.

En d'autres termes, cela signifie que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = a(x)y(x) + b(x) & (E) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution.
Géométriquement : il existe une unique fonction y solution de (E) dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées (x_0, y_0) .

3 Résolution de l'équation homogène

Théorème 3 *On considère l'EDL homogène d'ordre 1*

$$(E_H)\ y'(x) = a(x)y(x)$$

où a est une fonction continue sur I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Alors toute solution de (E_H) sur I s'écrit

$$\forall x \in I,\ y_H(x) = \lambda e^{A(x)}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ et A est une primitive de a sur I (A est une fonction !)

Une EDL d'ordre 1 admet une infinité de solutions. Ces solutions dépendent d'une constante. On peut en déduire qu'une EDL d'ordre 1

$$(E)\ y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$

admet aussi une infinité de solutions.

Démonstration du théorème 3 La démonstration se fait en deux étapes.

- On doit montrer que $y_H(x) = \lambda e^{A(x)}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et A est une primitive de a sur I est bien une solution de (E_H) (facile).
- On doit montrer que toute solution de (E_H) sur I est de cette forme.

Exercice 1 Résoudre les EDL d'ordre 1 (homogènes) suivantes

$$(E_1) \;\; y'(x) = -3y(x) \; ; \;\; (E_2) \;\; y'(x) = \frac{x}{x^2-1}y(x)$$

Voir tableau

4 Recherche d'une solution particulière

On veut maintenant apprendre à rechercher une solution particulière y_P (Etape 3 du plan de résolution) de l'équation complète

$$(E)\; y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$

4.1 Cas où a et b sont des (fonctions) constantes

On suppose dans cette partie que a et b sont des fonctions constantes, *i.e.* $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Dans ces conditions il existe une solution particulière y_P définie sur $\mathbb{R}$ où

$$\forall x \in \mathbb{R},\;\; y_P(x) = C,\;\; C \in \mathbb{R}$$

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $y_P(x) = C$ où $C \in \mathbb{R}$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y'_P(x) = 0$. Or y_P est solution de (E)

$$\iff \quad y'_P(x) = ay_P(x) + b \quad \iff \quad 0 = aC + b \quad \iff \quad C = \frac{-b}{a}$$

Exemple 3 Voir tableau

4.2 Cas général

On va présenter ici la méthode générale qui est toujours valable, quelque soit les fonctions a et b.
On rappelle le problème posé : on cherche y_P une solution particulère de (E)

$$(E)\; y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$

où a et b sont des fonctions continues sur I un intervalle de $\mathbb{R}$.

On rappelle qu'avant la recherche de y_P, on a trouvé y_H solution de l'équation homogène associée à (E)

$$\forall x \in I, y_H(x) = \lambda e^{A(x)}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$, et A est une primitive de a sur I.

Méthode de la variation de la constante. Cette méthode consiste à chercher y_P sous la forme suivante : on posera

$$\forall x \in I,\ y_P(x) = \lambda(x)e^{A(x)}$$

où λ est une fonction dérivable sur I. Pour connaître y_P, il suffit de déterminer la fonction λ.

On va voir sur un exemple pourquoi cette méthode permet de trouver y_P.

Exercice 2 Résoudre l'équation (Voir tableau)

$$(E)\ y'(x) = 2y(x) + e^x(x^2 + 2x)$$

Voyons maintenant dans le cas général pourquoi et comment cette méthode dite méthode de la variation de la constante nous permet de trouver y_p :

- Après avoir résolu l'équation homogène, on pose $\forall x \in I,\ y_P(x) = \lambda(x)e^{A(x)}$ où λ est une fonction dérivable sur I.
- On dérive y_P : $\forall x \in I,\ y'_P(x) = \lambda'(x)e^{A(x)} + \lambda(x)A'(x)e^{A(x)} = \lambda'(x)e^{A(x)} + \lambda(x)a(x)e^{A(x)}$.
- On utilise le fait que y_P est une solution de (E) donc y_P solution de (E) $\iff$ $y'_P(x) = a(x)y_P(x) + b(x)$

$$\iff \quad \lambda'(x)e^{A(x)} + \lambda(x)a(x)e^{A(x)} = a(x)\lambda(x)e^{A(x)} + b(x)$$

$$\iff \quad \lambda'(x)e^{A(x)} = b(x)$$

- On déduit λ' et on trouve λ en intégrant (λ est **une** primitive de λ')
- Une fois la fonction λ déterminée, vous obtenez votre solution particulière y_P.

$$y_P(x) = \lambda(x)e^{A(x)}$$

Exercice 3 *Problème de Cauchy*

On considère l'équation différentielle (E_1)

$$y' - 2y = 8\sin 2x.$$

1. Déterminer l'unique solution g de (E_1) dont la courbe représentative passe par le point M de coordonnées $(0, -2)$.
2. Montrer que g est une fonction sinusoïdale dont on précisera l'amplitude, la période et la phase.