**Chapitre 8**

# Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.

---

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.
Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction souvent notée $y$ en mathématiques, d'ordre 2 car dans l'équation, il apparait la dérivée seconde de la fonction $y$, il peut également apparaître la dérivée première et/ou la fonction $y$ elle-même.
Ceci exige, qu'une fonction solution de l'équation soit une fonction dérivable (deux fois) sur une certaine partie $I$ de $\mathbb{R}$.

Résoudre une équation différentielle (en mathématiques) c'est non seulement trouver la (ou les) fonctions $y$ qui sont solutions mais également le domaine de définition de ces fonctions solutions. On cherche généralement un couple $(I, y)$ où $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $y$ est une fonction définie sur $I$ qui vérifie l'équation.

Prenons deux exemples (simples) pour commencer : soit l'équation différentielle linéaire (EDL) d'ordre 2

$$(E_1) \quad y''(x) = 0$$

$y$ est la fonction inconnue, cette équation est dite homogène car le second membre est nul. Ici c'est très simple, connaissez vous une fonction $y$ définie sur $I$ une partie de $\mathbb{R}$ (ici $\mathbb{R}$ tout entier) telle que la dérivée seconde soit nulle ? Oui, posons par exemple pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_1(x) = x$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $y_1'(x) = 1$ et $y_1''(x) = 0$ donc $y_1$ est bien une solution de $(E_1)$ sur $\mathbb{R}$.
On peut montrer que toute solution de $(E_1)$ définie sur $\mathbb{R}$ s'écrit : $y(x) = \lambda x + \mu$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On pourra remarquer qu'une telle équation admet une infinité de solutions.

$$(E_2) \quad y''(x) + y(x) = 0$$

Là encore, on a une EDL d'ordre 2 homogène dont l'inconnue est notée $y$. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_1(x) = \cos x$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $y_1'(x) = -\sin x$ et $y_1''(x) = -\cos x$ donc $y_1$ est bien une solution de $(E_2)$ sur $\mathbb{R}$.
Posons maintenant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_2(x) = \sin x$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $y_2'(x) = \cos x$ et $y_2''(x) = -\sin x$ donc $y_2$ est bien aussi une solution de $(E_2)$ sur $\mathbb{R}$.
On peut montrer que toute solution de $(E_2)$ définie sur $\mathbb{R}$ s'écrit : $y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

**On rencontre souvent des équations différentielles linéaires d'ordre 2 en physique** (Electricité, Mécanique)

**Exemple issu de la physique** Voir tableau

Quelle est la forme d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 (à coefficients constants) dans le cas général ?

**Définition 1**

Toute équation différentielle $(E)$ d'ordre 2 à coefficients constants s'écrit

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$$

où

- $a$, $b$ et $c$ sont des constantes réelles (c'est pourquoi on dit "à coefficients constants")
- $f$ est la fonction du second membre, elle est continue sur $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$
- $y$ est la fonction inconnue ; $y$ sera définie sur $I$.
- L'équation $(E_H)$ $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$ est appelée l'équation homogène associée à l'EDL d'ordre 2 $(E)$.

# 1 Forme générale des solutions

On va donner un premier théorème qui donne la forme générale des solutions d'une EDL d'ordre 2

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$$

et qui permettra de mettre en place un plan de résolution de ces équations.

**Théorème 1** *Soit $(E)$ $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$, une EDL d'ordre 2 à coefficients constants où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $f$ est une fonction continue sur $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. La fonction $y$ est la fonction inconnue, elle est définie sur $I$. On note $y_P$ une solution particulière de $(E)$, $y_P$ est définie sur $I$.*

*Alors les fonctions solutions de $(E)$ s'écrivent*

$$\forall x \in I, \ y(x) = y_H(x) + y_P(x)$$

*où $y_H$ est solution de l'équation homogène associée $(E_H)$ $ay''(x)+by'(x)+cy(x) = 0$.*

**Démonstration du théorème 1** On doit montrer

- que toute fonction de la forme $y = y_H + y_P$ est bien une solution de $(E)$
- que toute solution $y$ de $(E)$ est de cette forme

Voir tableau.

A partir de ce théorème, on déduit un plan pour résoudre de telles équations.

Plan de résolution d'une EDL d'ordre 2 On veut résoudre

$$(E) \ \ ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$$

- Etape 1 On met en évidence l'intervalle de continuité $I$ de $f$ ce qui nous donne le domaine de définition des solutions $y$. Les fonctions $y$ seront définies sur $I$.

- Etape 2 On détermine $y_H$. On résout donc l'équation homogène associée à $(E)$, à savoir
$$(E_H) \quad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

- Etape 3 On détermine $y_P$. On doit donc trouver une solution particulière de $(E)$.

- Etape 4 On conclut en utilisant le théorème 1, toutes les solutions de $(E)$ s'écrivent
$$\forall x \in I,\ y(x) = y_H(x) + y_P(x)$$
où $I$ est le domaine de définition des solutions déterminé dans l'étape 1.

Il nous reste donc à apprendre à déterminer $y_H$ et $y_P$.

## 2 Résolution de l'équation homogène

On admet le résultat suivant.

**Théorème 2** *Soit $(E_H)$ l'EDL d'ordre 2 à coefficients constants*
$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$
*où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ d'inconnue $y$, $y$ est définie sur $\mathbb{R}$.*
*On appelle équation caractéristique associée à $(E_H)$ l'équation du second degré*
$$(\delta_c) \quad ar^2 + br + c = 0.$$

*1) Si $(\delta_c)$ admet deux racines réelles distinctes $r_1$ et $r_2$ (ce qui correspond à un discriminant $\Delta > 0$), alors les solutions de $(E_H)$ sont les fonctions de la forme*
$$\forall x \in \mathbb{R},\ y_H(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

*2) Si $(\delta_c)$ admet une racine double réelle $r_1$ (ce qui correspond à un discriminant $\Delta = 0$), alors les solutions de $(E_H)$ sont les fonctions de la forme*
$$\forall x \in \mathbb{R},\ y_H(x) = e^{r_1 x}(\lambda x + \mu) \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

*3) Si $(\delta_c)$ admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\omega$ et $r_2 = \alpha - i\omega$ (ce qui correspond à un discriminant $\Delta < 0$), alors les solutions de $(E_H)$ sont les fonctions de la forme*
$$\forall x \in \mathbb{R},\ y_H(x) = e^{\alpha x}\left[\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x)\right] \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Une EDL d'ordre 2 à coefficients constants admet une infinité de solutions. Ces solutions dépendent, dans chacun des cas, de deux contantes. On peut en déduire qu'une EDL d'ordre 2

$$(E) \quad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$$

admet une infinité de solutions.
**Exercice 1** Résoudre les EDL d'ordre 2 (homogènes) suivantes

$$(E_1) \ \ y''+2y'+y=0 \ ; \ (E_2) \ \ y''+y'-2y=0 \ ; \ (E_3) \ \ y''+2y'+2y=0 \ ; (E_4) \ \ y''+y=0$$

# 3 Recherche d'une solution particulière

On commence par un résultat général :

**Théorème 3** *Soit* $(E) \quad ay''(x)+by'(x)+cy(x) = f_1(x)+f_2(x)$ *une EDL d'ordre 2 à coefficients constants où* $f_1$ *et* $f_2$ *sont des fonctions continues sur* $I$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$*, alors une solution particulière de* $(E)$ *définie sur* $I$ *peut s'écrire*

$$y_P = y_{P_1} + y_{P_2}$$

*où* $y_{P_1}$ *est une solution particulière de l'équation* $(E_1) \quad ay''(x)+by'(x)+cy(x) = f_1(x)$ *et* $y_{P_2}$ *est une solution particulière de l'équation* $(E_2) \quad ay''(x)+by'(x)+cy(x) = f_2(x)$.

**Démonstration** à faire en exercice (très facile).

On veut maintenant apprendre à rechercher une solution particulière $y_P$ (Etape 3 du plan de résolution) de l'équation complète

$$(E) \quad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x).$$

On va proposer ici des méthodes uniquement dans certains cas particuliers (utiles en physique) ; ces méthodes vont dépendre de la forme de la fonction f du second membre.
Par exemple, on souhaite savoir déterminer $y_P$ si $f$ est une fonction constante, si $f$ est une fonction exponentielle, si $f$ est le produit d'une exponentielle par une constante ou plus généralement si $f$ est le produit d'une exponentielle par un polynôme de degré $n$ *i.e.* $f$ s'écrit

$$(1) \quad f(x) = e^{kx} P_n(x)$$

où $k \in \mathbb{R}$ et $P_n$ est un polynôme de degré n à coefficients réels.

## 3.1 $f(x) = e^{kx} P_n(x)$

On suppose ici que $k \in \mathbb{R}$ et $P_n$ est un polynôme de degré $n$ à coefficients réels. La méthode pour trouver $y_P$ consiste à comparer $k$ avec les racines de l'équation caractéristique $(\delta_C)$.
On admet la propriété suivante :

**Propriété 1** *Soit l'EDL d'ordre 2 à coefficients constants*

$$(E)\quad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = e^{kx}P_n(x).$$

- *Si $k$ n'est pas racine de l'équation caractéristique alors il existe une solution particulière de $E$ de la "même forme que $f$" i.e. on posera*

$$y_P(x) = e^{kx}Q_n(x)$$

  *où $Q_n$ est un polynôme de même degré que $P_n$.*

- *Si $k$ est une racine simple de l'équation caractéristique alors il existe une solution particulière de $E$ de la "même forme que $f$ multipliée par $x$" i.e. on posera*

$$y_P(x) = e^{kx}[xQ_n(x)]$$

  *où $Q_n$ est un polynôme de même degré que $P_n$.*

- *Si $k$ est une racine double de l'équation caractéristique alors il existe une solution particulière de $E$ de la "même forme que $f$ multipliée par $x^2$" i.e. on posera*

$$y_P(x) = e^{kx}[x^2Q_n(x)]$$

  *où $Q_n$ est un polynôme de même degré que $P_n$.*

**Exercice 2** Résoudre l'équation

$$(E)\quad y''(x) + y'(x) = xe^{2x}$$

Autre exemple de fonction $f$ : on souhaite aussi déterminer $y_P$ dans le cas où $f$ est une fonction sinusoïdale, ou le produit d'une fonction sinusoïdale par une exponentielle, autrement dit si $f$ s'écrit

$$(2)\quad f(x) = e^{kx}g(x)$$

où $g$ est une fonction sinusoïdale de pulsation $\beta$, de la forme

$$g(x) = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$$

## 3.2 $f(x) = e^{kx}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$

Ici $k \in \mathbb{R}$, $A$, $B$ et $\beta$ sont des constantes réelles, $\beta \neq 0$.
La première méthode proposée consiste à comparer le nombre complexe $k_1 = k + i\beta$ avec les racines de l'équation caractéristique $(\delta_c)$.
On admet la propriété suivante :

**Propriété 2** *Soit l'EDL d'ordre 2 à coefficients constants*

$$(E)\quad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = e^{kx}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$$

*On introduit le nombre complexe $k_1 = k + i\beta$. On rappelle que $\beta \neq 0$.*

- *Si $k_1$ n'est pas racine de l'équation caractéristique alors il existe une solution particulière de $E$ de la "même forme que $f$" i.e. on posera*

$$y_P(x) = e^{kx}h(x)$$

*où $h$ est une fonction sinusoïdale de pulsation $\beta$.*

- *Si $k_1$ est une racine simple de l'équation caractéristique alors il existe une solution particulière de $E$ de la "même forme que $f$ multipliée par $x$" i.e. on posera*

$$y_P(x) = e^{kx}[xg(x)]$$

*où $g$ est une fonction sinusoïdale de pulsation $\beta$*

**Exercice 3** Résoudre l'équation différentielle $(E)\quad y''(x) + 2y'(x) = e^x \cos x$. Voir tableau

On va maintenant proposer une autre méthode pour trouver $y_P$. Cette méthode est plus utilisée par les physiciens, elle est basée sur la propriété 1.

## 3.3 Une autre méthode si $f(x) = e^{kx}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$

On va essayer de se ramener au cas de la propriété 1. Partons d'un exemple, pour comprendre comment et pourquoi, on peut appliquer cette méthode (avec quelques généralisations).
**Exercice 4** On veut chercher une solution particulière $y_P$ de

$$(E)\quad y''(x) + 2y'(x) = e^x \cos x$$

avec une méthode un peu différente (plus proche de la propriété 1). Voir tableau

On admet les généralisations suivantes :
D'abord, si $k_1 \in \mathbb{C}$, $k_1 = a_1 + ib_1$ où $a_1 \in \mathbb{R}$, $b_1 \in \mathbb{R}$ alors

$$e^{k_1} = e^{a_1+ib_1} = e^{a_1}e^{ib_1} = e^{a_1}(\cos(b_1) + i\sin(b_1))$$

et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{k_1x} = e^{(a_1+ib_1)x} = e^{a_1x}e^{ib_1x} = e^{a_1x}(\cos(b_1x) + i\sin(b_1x))$$

**Propriété 3** *Soit $k_1 \in \mathbb{C}$, alors $x \mapsto e^{k_1x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x \mapsto k_1e^{k_1x}$. Attention, ces fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{C}$.*

La propriété 1 ci-dessus se généralise de la façon suivante :

**Propriété 4** *Soit l'EDL d'ordre 2 à coefficients constants*

$$(F)\quad az''(x) + bz'(x) + cz(x) = e^{k_1x}P_n(x).$$

*où $k_1 \in \mathbb{C}$, $z$ la fonction inconnue est une fonction à valeurs complexes et $P_n$ un polynôme de degré $n$ à coefficients réels et $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.*

- *Si $k_1$ n'est pas racine de l'équation caractéristique alors il existe une solution particulière de $(F)$ de la "même forme que $f$" i.e. on posera*

$$z_P(x) = e^{k_1 x} Q_n(x)$$

*où $Q_n$ est un polynôme (de même degré que $P_n$) à coefficients complexes.*

- *Si $k_1$ est une racine simple de l'équation caractéristique alors il existe une solution particulière de $(F)$ de la "même forme que $f$ multipliée par $x$" i.e. on posera*

$$z_P(x) = e^{k_1 x}[xQ_n(x)]$$

*où $Q_n$ est un polynôme (de même degré) que $P_n$ à coefficients complexes.*

**Point méthode pour la recherche de $y_P$.**

- Cas 1 Si le second membre, *i.e.* la fonction $f$ est de la forme

$$f(x) = e^{kx}(A\cos(\beta x)),$$

on doit donc résoudre

$$(E) \quad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = e^{kx}(A\cos(\beta x))$$

où $k \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$. On sait que $\cos(\beta x) = \mathrm{Re}(e^{i\beta x})$. On associe alors l'équation

$$(F) \quad az''(x) + bz'(x) + cz(x) = Ae^{x(k+i\beta)}$$

On cherche $z_P$ une solution particulière de $(F)$ à valeurs complexes (en utilisant la propriété 4) et $y_P = \mathrm{Re}(z_P)$ sera une solution de $(E)$.

Attention pour trouver $z_P$, on va comparer $k_1 = k + i\beta$ avec les racines de $(\delta_C)$.

- Cas 2 Si le second membre, *i.e.* la fonction $f$ est de la forme

$$f(x) = e^{kx}(B\sin(\beta x)),$$

on doit donc résoudre

$$(E) \quad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = e^{kx}(B\sin(\beta x))$$

où $k \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$. On sait que $\sin(\beta x) = \mathrm{Im}(e^{i\beta x})$. On associe alors l'équation

$$(F) \quad az''(x) + bz'(x) + cz(x) = Be^{x(k+i\beta)}$$

On cherche $z_P$ une solution particulière de $(F)$ à valeurs complexes (en utilisant la propriété 4) et $y_P = \mathrm{Im}(z_P)$ sera une solution de $(E)$.

Attention pour trouver $z_P$, on va comparer $k_1 = k + i\beta$ avec les racines de $(\delta_C)$.

- Cas général Si le second membre, *i.e.* la fonction $f$ est de la forme

$$f(x) = e^{kx}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)),$$

on doit donc résoudre

$$(E) \quad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = e^{kx}(A\cos(\beta x)) + e^{kx}(B\sin(\beta x))$$

on utilise alors le théorème 3. A savoir, à l'équation $(E)$, on associe les deux EDL d'ordre 2,

$$(E_1) \;\; ay''(x)+by'(x)+cy(x) = e^{kx}(A\cos(\beta x)) \; ; \; (E_2) \;\; ay''(x)+by'(x)+cy(x) = e^{kx}(B\sin(\beta x))$$

On détermine $y_{P_1}$ solution particulière de $(E_1)$ en utilisant le cas 1 ci-dessus, puis on détermine $y_{P_2}$ solution particulière de $(E_2)$ en utilisant le cas 2 ci-dessus et d'après le théorème 3

$$y_P = y_{P_1} + y_{P_2}$$

est une solution particulière de $(E)$.

# 4 Problème de Cauchy

On appelle problème de Cauchy la donnée d'une équation différentielle avec condition(s) initiale(s), par exemple

$$\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^x \cos x \quad (E) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

est un problème de Cauchy. Pour le résoudre, on s'occupe d'abord de résoudre, l'équation $(E)$, on détermine toutes les solutions de $(E)$ comme on l'a fait précédemment.

Puis en utilisant les conditions initiales, on détermine les constantes et on va trouver l'unique solution du problème de Cauchy. En effet, selon le théorème suivant (admis), un problème de Cauchy admet une solution unique.

**Théorème 4** *Théorème de Cauchy-Lipschitz (cas linéaire)*

*On considère une EDL d'ordre 2*

$$(E) \quad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$$

*où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $f$ est continue sur $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors pour tout $x_0 \in I$, tout $y_0 \in \mathbb{R}$ et $y_1 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution $y$ de l'équation $(E)$ définie sur $I$ et vérifiant $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$.*

En d'autres termes, cela signifie que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x) \quad (E) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

admet une unique solution.
Géométriquement : il existe une unique fonction $y$ solution de $(E)$ dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées $(x_0, y_0)$ et dont le coefficient directeur de la tangente en ce point soit égal à $y_1$.
$y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$ sont appelées les **conditions initiales** (voir exemples en TD).