Chapitre 7

Intégration.

Dans ce chapitre :

- on va établir un lien entre la notion d'aire et d'intégrale,
- puis on va donner un lien entre primitive et intégrale
- enfin on mettra en évidence des techniques d'intégration pour faciliter le calcul de certaines intégrales.

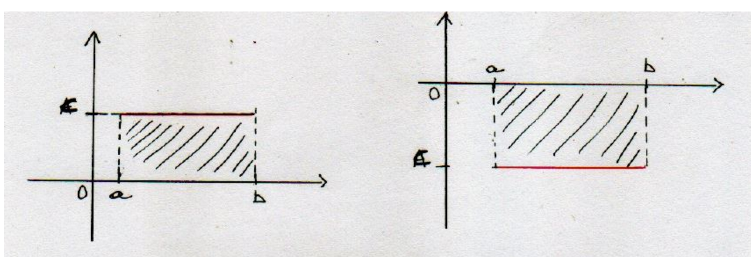
Pour savoir intégrer il est indispensable de connaître ses primitives usuelles puis de s'entrainer pour pouvoir maîtriser les différentes techniques d'intégration.

1 Aires et intégrales

1.1 Les fonctions constantes sur $[a, b]$

Soit f définie par $f(x) = C$ pour tout $x \in [a, b]$, où C est une constante réelle. On peut avoir les deux configurations ci-dessous, selon que C est positif ou négatif. On considère l'aire algébrique $\mathcal{A}$ du rectangle situé entre la courbe d'équation $y = f(x) = C$, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$. Dans tous les cas, on a

$$\mathcal{A} = C(b - a)$$



Définition 1 On appelle intégrale de f sur l'intevalle $[a, b]$ le nombre réel noté et défini par

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = C(b - a)$$

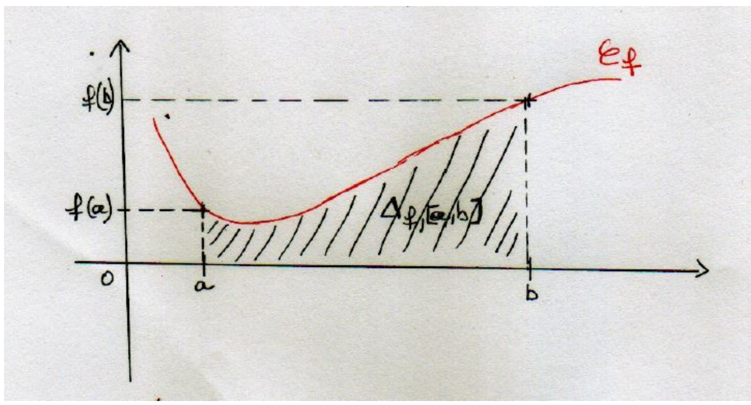
1.2 Les fonctions continues sur $[a, b]$

1.2.1 Cas d'une fonction continue positive sur $[a, b]$

On considère f une fonction continue et positive sur $[a, b]$. On définit la partie hachurée représentée ci-dessous à savoir :
l'ensemble des points M du plan de coordonnées (x, y) situés entre la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$. On note

$$\Delta_{f,[a,b]} = \{M(x, y) \text{ tels que } a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

cette partie du plan.



Définition 2 On appelle intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$ le nombre réel noté

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

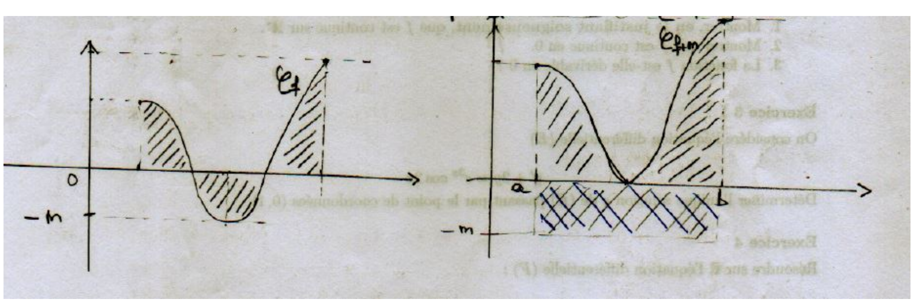
qui correspond à l'aire de $\Delta_{f,[a,b]}$.

Exercice 1 Calculons à l'aide de cette définition $\displaystyle\int_0^1 x\ \mathrm{d}x$.

Voir Tableau

1.2.2 Cas d'une fonction continue et de signe quelconque sur $[a, b]$

Comme f est continue sur $[a, b]$, il existe un réel strictement positif tel que pour tout $x \in [a, b]$, $-m \leq f(x)$ (toute fonction continue sur $[a, b]$ est bornée). Dans ces conditions, la fonction $f + m$ est poitive sur $[a, b]$.



On a alors la définition suivante :

Définition 3 Avec les notations précédentes,

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b (f(x)+m)\ \mathrm{d}x - m(b-a) = \mathcal{A}_{\Delta_{f+m,[a,b]}} - m(b-a)$$

1.2.3 Cas d'une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$

Définition 4 On dit que f est continue par morceaux sur un intervalle $[a, b]$ si f est continue en tout point de $[a, b]$ sauf éventuellement en un nombre fini de points de $]a, b[$ en lesquels f admet une limite à droite et à gauche.

Définition 5 Si f est continue sur $[a, b]$ sauf en un point $c \in]a, b[$ en lequel f admet une limite à droite et à gauche alors on pose

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

Exercice 2 Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x-1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Calculez $\displaystyle\int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x$.

Voir tableau

Remarque Lorsqu'on note $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$, la variable d'intégration est dite "muette", cela signifie qu'on peut la noter comme on le souhaite.

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(u)\ \mathrm{d}u = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \cdots$$

2 Premières propriétés

Ces propriétés se déduisent des propriétés des aires.

Propriété 1 *Soit f continue sur I intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $b \in I$ et $c \in I$.*

- $\displaystyle\int_b^a f(x)\ \mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$
- *Relation de Chasles*

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

Propriété 2 *Linéarité*
Soit f et g continues sur I intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $b \in I$. Alors

- $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$.
- *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b \lambda f(t)\ \mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$.

Propriété 3 *Signe d'une intégrale*
Soit f *et* g *continues sur* I *intervalle de* $\mathbb{R}$, $a \in I$ *et* $b \in I$ *tels que* $a \leq b$.

- *Si* f *est positive sur* $[a, b]$ *alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \geq 0$.
- *Si pour tout* $x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$ *alors*

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$$

- $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x$.

Toutes ces propriétés restent valables si on suppose simplement que les fonctions sont continues par morceaux.

3 Formule de la moyenne

Si f est continue sur $[a, b]$ alors on sait que pour tout $x \in [a, b]$,

$$m \leq f(x) \leq M$$

où m et M sont respectivement le minimum et maximum de f sur $[a, b]$. On intègre ces inégalités entre a et b (en utilisant la propriété 3) :

$$\int_a^b m\ \mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq \int_a^b M\ \mathrm{d}x$$

Soit

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq M$$

f est continue sur $[a, b]$ donc f prend toutes les valeurs comprises entre m et M (d'après le théorème des valeurs intermédiaires).
On déduit alors le théorème suivant.

Théorème 1 *Soit f continue sur $[a, b]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que*

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$$

Le nombre réel $\mu = \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$ est appelé la valeur moyenne de f sur $[a, b]$.

Interprétation graphique de la formule de la moyenne
On se place dans le cadre d'une fonction continue positive sur $[a, b]$. Le théorème ci-dessus dit qu'il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $(b-a)f(c) = \displaystyle\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$. Cela signifie graphiquement qu'il existe un rectangle de base $b-a$ et de hauteur $f(c)$ dont l'aire est égale à l'aire de $\Delta_{f,[a,b]}$.

Voir Tableau.

4 Primitives

Définition 1 Soit f et F deux fonctions définies sur une partie I de $\mathbb{R}$. On dit que F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Exemples 1

- $F : x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ est une primitive de $f : x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$. En effet, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = x = f(x)$.
- $F : x \mapsto e^x$ est une primitive de F (d'elle même) sur $\mathbb{R}$. En effet, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = e^x = F(x)$.
- $F : x \mapsto \sin(x)$ est une primitive de $f : x \mapsto \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$. En effet, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \cos(x) = f(x)$.

Propriété 4 *On suppose que f admet une primitive F sur I un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors toutes les primitives de f sur I sont les fonctions de la forme*

$$G = F + C, \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

Remarque Attention, cette propriété est fausse si on ne se place pas sur un intervalle.

Démonstration Voir Tableau

4.1 Théorème fondamental de l'intégration

Théorème 2 *Soit f une fonction continue sur I (intervalle de $\mathbb{R}$) et $a \in I$ alors la fonction F définie sur I par*

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t$$

est la primitive de f sur I qui s'annule en a.

Remarque $\displaystyle\int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t$ est une intégrale indéfinie ; elle désigne (si f est continue sur I, intervalle de $\mathbb{R}$) la primitive de f sur I qui est nulle en $x = a$.

Démonstration du théorème 2 Posons

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t$$

On doit montrer que F est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$. Soit x un point quelconque de I (arbitrairement fixé) :

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t) \, \mathrm{d}t - \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t = \int_a^{x+h} f(t) \, \mathrm{d}t + \int_x^a f(t) \, \mathrm{d}t$$

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t) \, \mathrm{d}t$$

f est continue sur $[x, x+h]$, d'aprés le théorème 1, il existe $c_x \in [x, x+h]$ tel que

$$f(c_x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) \, \mathrm{d}t = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

Si h tend vers 0, le point c_x tend vers x et comme f est continue, $f(c_x)$ tend vers $f(x)$.
On obtient donc

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} f(c_x) = f(x)$$

On vient de montrer que F est dérivable en x et que $F'(x) = f(x)$ (et ceci pour tout $x \in I$). On a bien établi que F est une primitive de f sur I et $F(a) = \int_a^a f(t) \, \mathrm{d}t = 0$.

Théorème 3 *Théorème fondamental de l'intégration*
Soit f continue sur I, F une primitive de f sur I et $a \in I$, $b \in I$ alors

$$\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t = \big[F(t)\big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Remarques importantes sur ce théorème

- Pourquoi l'appelle-t-on le théorème fondamental de l'intégration ? Ce théorème permet de calculer $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ dès qu'on connait une primitive de la fonction f.
- Le théorème 3 s'écrit

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \big[F(t)\big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Or pour tout $t \in I$, $f(t) = F'(t)$, on peut alors écrire

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b F'(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{d}F = F(b) - F(a)$$

car on sait que $F'(t)\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}F$, la différentielle de F.

Démonstration du théorème 3 Voir Tableau.

4.2 Notations

On distingue différents types d'intégrales que vous ne devez pas confondre !
Soit f continue sur I, $a \in I$, $b \in I$, et $x \in I$.

- $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est un nombre réel (=aire algébrique d'une partie du plan situé entre la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$). On dit que c'est une intégrale définie.
- $x \mapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est une fonction. C'est la primitive de f sur I qui s'annule en $x = a$. On dit que c'est une intégrale indéfinie.
- $\int f(t)\ \mathrm{d}t$ (intégrale sans borne) désigne la forme générale des primitives de la fonction f sur I (dépend d'une constante).

Exemples Calculer les intégrales suivantes :
$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\ \mathrm{d}x$, $J(x) = \int \cos(x)\ \mathrm{d}x$.
$K(x) = \int \frac{1}{x^2+1}\ \mathrm{d}x$, $L = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\ \mathrm{d}x$, $M(x) = \int_0^x \frac{1}{t^2+1}\ \mathrm{d}t$.
Voir tableau

5 Techniques d'intégration

Dans cette partie on va étudier les différentes techniques pour savoir calculer une intégrale : cela dépendra de la fonction à intégrer.

5.1 Intégration directe : on connait une primitive

Certaines intégrales sont faciles à calculer car on connait directement une primitive de la fonction à intégrer.
Il y a des primitives usuelles à connaître, comme vous connaissez les dérivées de fonctions usuelles, vous devez connaître le tableau des primitives usuelles. Voir Tableau de primitives usuelles sur le site.

`http://mathmp.nb.free.fr/primitives.pdf`

Exercice 1 Calculer

$$I = \int_0^1 (x^3 + 2x + 1)\ \ dx,\ \ J = \int_0^{\pi} \sin(x)\ \mathrm{d}x,\ \ K = \int_1^2 \frac{1}{x^3}\ \mathrm{d}x,\ \ L = \int_0^2 e^{3x}\ \mathrm{d}x.$$

Voir tableau

5.2 Primitives de fonctions particulières

On a déjà vu (TD3) deux méthodes pour intégrer certains types de fonctions :

- les fonctions de la forme $x \mapsto e^{kx}P(x)$ où $k \in \mathbb{R}$ et P est une fonction polynomiale
- les fonctions de la forme $x \mapsto e^{kx}g(x)$ où $k \in \mathbb{R}$ et g une fonction sinusoidale de pulsation ω.

dans les deux cas, ces fonctions admettent une primitive de la "même forme" (voir TD 3). Ces méthodes vues en début d'année sont très utiles pour intégrer ce type de fonctions (on verra une autre méthode avec l'intégration par parties mais qui peut s'avérer plus longue).

Exercice 2 Calculer

$$I = \int_0^1 e^{-x}(x^2 + 2x)\ \ dx,\ \ J = \int_0^{\pi} e^x \cos(x)\ \mathrm{d}x$$

Voir tableau

Autres fonctions particulières : on ne sait pas intégrer un produit de cosinus ou de sinus, pour cela on doit d'abord linéariser, à savoir transformer le produit en une somme. En effet, on sait alors intégrer une somme de cosinus ou de sinus.

- Pour les primitives de fonctions de la forme $x \mapsto \cos(ax)\cos(bx)$ et $x \mapsto \sin(ax)\sin(bx)$, on doit linéariser en utilisant les formules de trigonométrie suivantes :

  $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ (1) et $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ (2).
  En effet, en ajoutant (1) et (2), on obtient :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right],$$

et si on soustrait (2) et (1), on obtient :

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right].$$

Enfin, pour les primitives de fonctions de la forme $x \mapsto \sin(ax)\cos(bx)$, on doit aussi linéariser en utilisant les formules de trigonométrie suivantes :

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ (1) et $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$ (2). En effet, en ajoutant (1) et (2), on obtient :

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right],$$

- Pour les primitives de fonctions de la forme $x \mapsto \cos^p x \sin^q x$ avec p et q **des nombres pairs**, on doit linéariser en utilisant les formules d'Euler :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

  Si p ou q est **un nombre impair**, on peut aussi linéariser mais on verra une méthode plus simple avec le changement de variable (fin du chapitre).

Exercice 3 Calculer :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \ \mathrm{d}x, \ I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\cos(x) \ \mathrm{d}x, \ I_3 = \int_0^{\pi} \sin(3x)\sin(x) \ \mathrm{d}x$$

Voir tableau.

5.3 Intégration par partie

Pour certaines intégrales dont l'intégration n'est pas directe, on peut utiliser la formule dite d'intégration par partie. Cette technique permet en principe de se ramener à une intégrale plus simple.

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$, $b \in I$ (u et v sont dérivables sur I et leurs dérivées continues sur I), dans ces conditions le produit uv est également dérivable sur I et

$$(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

D'où en intégrant entre a et b :

$$\int_a^b (uv)'(x) \ \mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x) \ \mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x) \ \mathrm{d}x$$

$$\iff \ \left[(uv)(x)\right]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x) \ \mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x) \ \mathrm{d}x.$$

Ce qui s'écrit :

$$\int_a^b u(x)v'(x) \ \mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \ \mathrm{d}x$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 4 *Formule d'intégration par partie*
Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$, $b \in I$ alors

$$\int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x$$

Commentaire : la formule d'IPP est utilisée lorsqu'on peut identifier un produit de fonctions qui ne s'intègre pas directement, on choisit celle qu'on va dériver et celle qu'on va intégrer. L'objectif étant de se ramener à une intégrale plus simple. C'est en s'entrainant qu'on devient opérationnel sur cette technique...

Exercice 4 Calculer les intégrales suivantes.

$$I_1 = \int_0^\pi t\cos(t)\ \mathrm{d}t,\ I_2 = \int_0^1 (x+1)e^{-x}\ \mathrm{d}x,\ I_3 = \int_1^2 \ln(x)\ \mathrm{d}x$$

Voir Tableau.

5.4 Changement de variable dans une intégrale

On admet le théorème suivant :

Théorème 5 *Formule de changement de variable*
Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I = [a,b]$ et soit f continue sur $\varphi(I)$, on a la formule suivante dite de "changement de variable" :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\ \varphi'(t)\ \mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\ \mathrm{d}x$$

Pour passer de l'intégrale de gauche à celle de droite on a effectué le "changement de variable" suivant :
on a posé $x = \varphi(t)$ (nouvelle variable x exprimée en fonction de l'ancienne t), on a changé l'élément différentiel $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\ \mathrm{d}t$ et on a changé les bornes.

Exercice 5 Calculer les intégrales suivantes.

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos x\ \mathrm{d}x,\ I_2 = \int_0^\pi \cos^2 x\sin x\ \mathrm{d}x,\ I_3 = \int_0^1 \frac{1}{(3x+1)^3}\ \mathrm{d}x$$

$$J_1 = \int_0^2 \frac{1}{x^2+4}\ \mathrm{d}x,\ J_2 = \int_0^1 \frac{1}{(2x+1)^4}\ \mathrm{d}x,\ J_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\ \mathrm{d}x,$$

Voir Tableau.

A partir du théorème 5, on peut démontrer deux propriétés intéressantes.

6 Deux autres propriétés importantes de l'intégrale

Propriété 5 *Soit f continue sur $\mathbb{R}$ alors*

- *si f est paire,* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x.$
- *Si f est impaire,* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x = 0.$

Exemple

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\ \mathrm{d}x = 0$$

Démonstration de la propriété 5 Voir Tableau.

Remarque Essayez de réfléchir à l'interprétation graphique de la propriété ci-dessus.

Propriété 6 *Soit f une fonction T-périodique, continue sur $[0, T]$. Alors la valeur de l'intégrale de f est la même sur tout intervalle de longueur T i.e.*

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{0}^{T} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Exemple Comme la fonction sinus est 2π-périodique et impaire (et continue sur $\mathbb{R}$), en utilisant les deux propriétés ci-dessus, on a

$$\int_{0}^{2\pi} \sin x\ \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x\ \mathrm{d}x = 0$$

Démonstration de la propriété 6 Voir Tableau.