Chapitre 6

De nouvelles fonctions : les fonctions hyperboliques.

Dans ce chapitre, on s'intéresse à trois nouvelles fonctions : les **fonctions hyperboliques**.
On définit la fonction cosinus hyperbolique notée ch, la fonction sinus hyperbolique notée sh et enfin la fonction tangente hyperbolique notée th de la façon suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Nous allons étudier ces trois fonctions.

Avant l'étude de ces trois fonctions, essayons de définir la notion de courbe asymptote au voisinage de $+\infty$ (ou de $-\infty$).

Définition 1 *Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leur courbe représentative dans la plan muni d'un repère orthonormé. On dira que la courbe $\mathcal{C}_g$ est asymptote au voisinage de $+\infty$ (respectivement au voisinage de $-\infty$) à $\mathcal{C}_f$ si*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - g(x) = 0 \text{ (respectivement } \lim_{x \to -\infty} f(x) - g(x) = 0).$$

1 Etude de la fonction sinus hyperbolique

La fonction sh est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\mathrm{sh})'(x) = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x) > 0$$

La fonction sh est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
La fonction sh est une fonction impaire sur $\mathbb{R}$. En effet

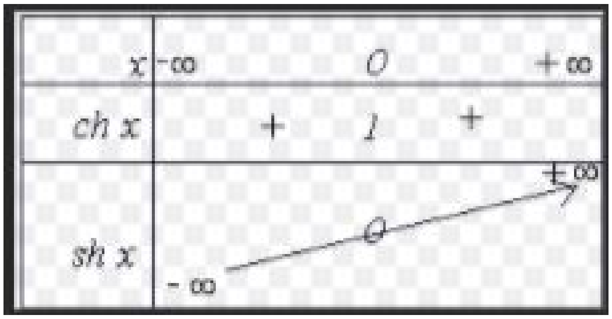
$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\mathrm{sh})(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\mathrm{sh}(x)$$

On pourrait se limiter à son étude sur $[0, +\infty[$. Le reste de la courbe peut être obtenu par symétrie par rapport à l'origine du repère.
On a

$$\mathrm{sh}(0) = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \mathrm{sh}(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty$$

De plus $(\mathrm{sh})'(0) = \mathrm{ch}(0) = 1$, la droite d'équation $y = x$ est tangente à la courbe représentative de la fonction sh au point de coordonnées $(0, \mathrm{sh}(0)) = (0, 0)$.

Tableau des variations de la fonction sh :



On va montrer que la courbe d'équation $y = \frac{e^x}{2}$ est asymptote à la courbe repésentative de la fonctions sh au voisinage de $+\infty$. Pour cela on montre que $\lim_{x \to +\infty} \text{sh}(x) - \frac{e^x}{2} = 0$.
En effet,

$$\lim_{x \to +\infty} \text{sh}(x) - \frac{e^x}{2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} - \frac{e^x}{2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-e^{-x}}{2} = 0$$

On obtient donc que la courbe d'équation $y = \frac{e^x}{2}$ est asymptote à la courbe repésentative de la fonctions sh au voisinage de $+\infty$.

Par ailleurs, pour tout $x > 0$, $\text{sh}(x) - \frac{e^x}{2} = \frac{-e^{-x}}{2} < 0$, donc la courbe représentative de sh est au dessous de la courbe d'équation $y = \frac{e^x}{2}$.

Représentation graphique 1 On se place dans un repère orthonormé. Voir tableau

Remarque La fonction sh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$). Elle est donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note argsh sa fonction réciproque (fonction argument sinus hyperbolique).

2 Etude de la fonction cosinus hyperbolique

La fonction ch est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ (\text{ch})'(x) = \frac{e^x + (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{sh}(x)$$

On vient d'étudier la fonction sh. On connait son signe :

$$\forall x < 0, \ (\text{ch})'(x) = \text{sh}(x) < 0 \ ; \ \forall x \geq 0, \ (\text{ch})'(x) = \text{sh}(x) \geq 0$$

La fonction ch est donc strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
La fonction ch est une fonction paire sur $\mathbb{R}$. En effet

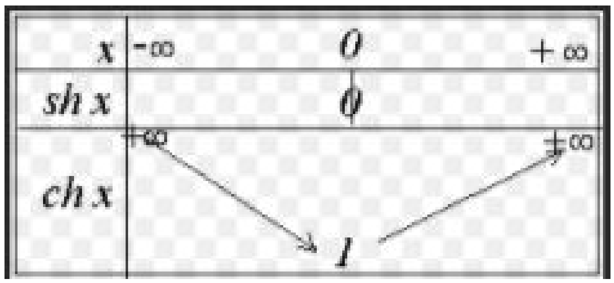
$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \text{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \text{ch}(x)$$

On pourrait se limiter à son étude sur $[0, +\infty[$. Le reste de la courbe peut être obtenu par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
On a

$$\mathrm{ch}(0) = 1 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \mathrm{ch}(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = +\infty$$

De plus $(\mathrm{ch})'(0) = \mathrm{sh}(0) = 0$, la courbe représentative de la fonction ch admet au point de coordonnées $(0, \mathrm{ch}(0)) = (0, 1)$ une tangente horizontale.

Tableau des variations de la fonction ch :



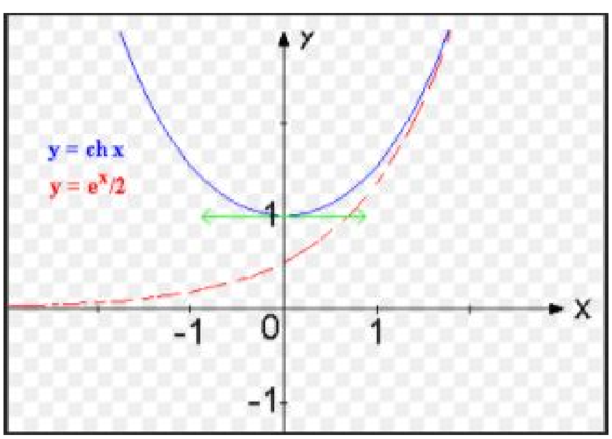
On va montrer que la courbe d'équation $y = \dfrac{e^x}{2}$ est asymptote à la courbe repésentative de la fonctions ch au voisinage de $+\infty$. Pour cela on montre que $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{ch}(x) - \dfrac{e^x}{2} = 0$.
En effet,

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{ch}(x) - \frac{e^x}{2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x}{2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{2} = 0$$

On obtient donc que la courbe d'équation $y = \dfrac{e^x}{2}$ est asymptote à la courbe repésentative de la fonctions ch au voisinage de $+\infty$.

Par ailleurs, pour tout $x > 0$, $\mathrm{ch}(x) - \dfrac{e^x}{2} = \dfrac{e^{-x}}{2} > 0$, donc la courbe représentative de ch est au dessus de la courbe d'équation $y = \dfrac{e^x}{2}$.

Représentation graphique 2



Remarque La fonction ch n'est pas bijectve sur $\mathbb{R}$. Por la rendre bijective, on doit restriendre son domaine de définition à $[0, +\infty[$.
Elle est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ (à valeurs dans $[1, +\infty[$). Elle est donc bijective de $[0, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$. On note argch sa fonction réciproque (fonction argument cosinus hyperbolique).

Exercice 5 Les fonctions hyperboliques ont des similitudes avec les fonctions trigonométriques classiques (cosinus, sinus et tangente). On a en particulier des formules de trigonométrie "hyperbolique". Démontrer les trois formules suivantes :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1.$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(2x) = 2\mathrm{ch}^2(x) - 1.$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}(2x) = 2\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x).$

Correction Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4}$$

$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = \frac{4}{4} = 1$$

La suite.....à faire seul...

3 Etude de la fonction tangente hyperbolique

La fonction th est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme quotient de fonctions qui sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ et dont le dénominateur ne s'annule pas).

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\mathrm{th})'(x) = \frac{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} > 0$$

La fonction th est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
La fonction th est une fonction impaire sur $\mathbb{R}$. En effet

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}(-x) = \frac{\mathrm{sh}(-x)}{\mathrm{ch}(-x)} = \frac{-\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = -\mathrm{th}(x)$$

On pourrait se limiter à son étude sur $[0, +\infty[$. Le reste de la courbe peut être obtenu par symétrie par rapport à l'origine du repère.
On a

$$\mathrm{th}(0) = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \mathrm{th}(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

C'est une forme indéterminée, pour lever l'indétermination on va factoriser par e^x au numérateur et au dénominateur :

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{th}(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1+e^{-2x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1$$

On peut déduire que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.

Comme la fonction th est impaire, sans calcul, on déduit que

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{th}(x) = -1$$

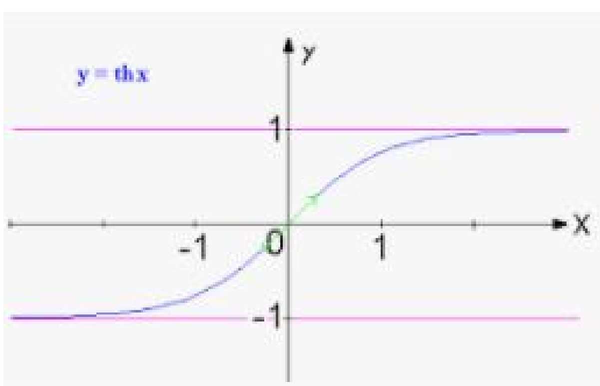
et la droite d'équation $y = -1$ est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $-\infty$.

De plus $(\operatorname{th})'(0) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(0)} = 1$, la droite d'équation $y = x$ est tangente à la courbe représentative de la fonction th au point de coordonnées $(0, \operatorname{th}(0)) = (0, 0)$.

Tableau des variations de la fonction th :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$(thx)'$		$+$	1	$+$	
thx	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

Représentation graphique



Remarque La fonction th est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (à valeurs dans $]-1,1[$). Elle est donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$. On note argth sa fonction réciproque (fonction argument tangente hyperbolique).