Chapitre 5

Compléments sur les bijections et de nouvelles fonctions : réciproques des fonctions trigonométriques.

---

1 Compléments sur les fonctions bijectives

On a vu dans le chapitre précédent comment établir qu'une fonction est bijective sur un intervalle I de $\mathbb{R}$: si f est continue et strictement monotone sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ alors f est bijective de I sur $J = f(I)$, son application réciproque $f^{-1}\ :\ J \to I$ est continue et strictement monotone sur J (elle a le même sens de variation que f).

On va compléter ce résultat : on va supposer f bijective de I dans $J = f(I)$, si f est dérivable sur I, sa fonction réciproque f^{-1} est-elle dérivable sur J ? On va voir que c'est un peu plus compliqué, il faut rajouter d'autres hypothèses.
Le théorème qui suit permet de donner des conditions pour que f^{-1} (la fonction réciproque de f) soit dérivable (cela dépend de la fonction f), il donne également la formule pour obtenir la dérivée de f^{-1} (qui dépend de la dérivée de f).

Théorème 1 *Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$ tel que f soit dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$.*
On pose $y_0 = f(x_0)$ ($\iff$ $x_0 = f^{-1}(y_0)$).
Alors f^{-1} est dérivable en y_0 et

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'[f^{-1}(y_0)]}$$

Dans une deuxième partie on va montrer que la restriction des fonctions trigonométriques cosinus, sinus et tangente à certains intervalles sont bijectives et on va étudier leurs fonctions réciproques.

2 Fonctions réciproques des fonctions trigonométriques

2.1 La fonction arcsinus

$x \mapsto \sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais elle n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$ (sinus est 2π-périodique, par exemple $\sin(0) = \sin(2\pi) = 0$). **On va se restreindre à l'intervalle** $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$x \mapsto \sin(x)$ est continue et strictement croissante sur $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ à valeurs dans $[-1, 1]$.

D'après le théorème vu dans le chapitre 4, elle est bijective de $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $J = [-1, 1]$. On note arcsin sa réciproque. Voir tableau.

Propriété 1 *La fonction* arcsin *(arcsinus) est définie, continue et strictement croissante sur* $[-1,1]$ *à valeurs dans* $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

$$\operatorname{arcsin}\ :\ \begin{array}{l}[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\\ x\mapsto\operatorname{arcsin}(x)\end{array}$$

La fonction arcsin *est une fonction* *impaire* *sur* $[-1,1]$ *et*

$$\forall\ x\in[-1,1],\ \sin(\operatorname{arcsin}(x))=x$$
$$\forall\ x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\ \operatorname{arcsin}(\sin(x))=x.$$

- **Tableau de variations de la fonction** arcsin : voir tableau

- **Interprétation** Si $y\in[-1,1]$, comment interpréter $\operatorname{arcsin}(y)$? Comment connaître la valeur de $\operatorname{arcsin}(y)$ (pour quelques valeurs remarquables de y) ?

  Pour tout $y\in[-1,1]$, $\operatorname{arcsin}(y)$ *est un angle appartenant à l'intervalle* $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ *dont le sinus vaut* y. Voir tableau

- **Représentation graphique 1** On se place dans un repère orthonormé. Voir tableau.

- **Dérivabilité**

  On applique ici le théorème 1 du paragraphe 1 pour établir le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée de la fonction arcsinus.

  La fonction sin est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et sa dérivée (la fonction cosinus) ne s'annule pas sur cet intervalle

  $$\forall\ x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,\ \cos(x)\neq 0.$$

  Soit $y=\sin(x)$ où $x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, on a alors $y\in]-1,1[$. D'après le théorème 1, la fonction arcsin est dérivable en y et

  $$(\operatorname{arcsin})'(y)=\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\cos(\operatorname{arcsin}(y))}$$

Exercice 1. A retenir Démontrer que pour tout $x\in[-1,1]$,

$$\cos(\operatorname{arcsin}(x))=\sqrt{1-x^2}$$

Finalement, on vient de démontrer la propriété suivante

Propriété 2 *La fonction* arcsin *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et*

$$\forall\ x\in]-1,1[,\ (\operatorname{arcsin})'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2.2 La fonction arccosinus

$x \mapsto \cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais elle n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$ (cosinus est 2π-périodique, par exemple $\cos(0) = \cos(2\pi) = 1$). **On va se restreindre à l'intervalle** $[0, \pi]$.

$x \mapsto \cos(x)$ est continue et strictement décroissante sur $I = [0, \pi]$ à valeurs dans $[-1, 1]$. Voir tableau

D'après le théorème vu dans le chapitre 4, elle est bijective de $I = [0, \pi]$ sur $J = [-1, 1]$. On note arccos sa réciproque.

Propriété 3 *La fonction* arccos *(arccosinus) est définie, continue et strictement décroissante sur* $[-1, 1]$ *à valeurs dans* $[0, \pi]$*.*

$$\arccos \ : \ \begin{array}{l} [-1,1] \to [0,\pi] \\ x \mapsto \arccos(x) \end{array}$$

La fonction arccos *vérifie :*

$$\forall\ x \in [-1, 1],\ \cos(\arccos(x)) = x$$
$$\forall\ x \in [0, \pi],\ \arccos(\cos(x)) = x.$$

- **Tableau de variations de la fonction** arccos : voir tableau
- **Interprétation** Si $y \in [-1, 1]$, comment interpréter $\arccos(y)$? Comment connaître la valeur de $\arccos(y)$ (pour quelques valeurs remarquables de y) ?

  Pour tout $y \in [-1, 1]$*,* $\arccos(y)$ *est un angle appartenant à l'intervalle* $[0, \pi]$ *dont le cosinus vaut* y*.* Voir tableau.
- **Représentation graphique 2** On se place dans un repère orthonormé. Voir tableau
- **Dérivabilité**

  On applique ici le théorème 1 du paragraphe 1 pour établir le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée de la fonction arccosinus.

  La fonction cos est dérivable sur $]0, \pi[$ et sa dérivée (l'opposé de la fonction sinus) ne s'annule pas sur cet intervalle

  $$\forall\ x \in]0, \pi[,\ -\sin(x) \neq 0.$$

  Soit $y = \cos(x)$ où $x \in]0, \pi[$, on a alors $y \in]-1, 1[$. D'après le théorème 1, la fonction arccos est dérivable en y et

  $$(\arccos)'(y) = \frac{1}{-\sin x} = \frac{-1}{\sin(\arccos(y))}$$

Exercice 2. **A faire** Démontrer que pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$

(la méthode est analogue à celle de l'exercice 1)

Finalement, on vient de démontrer la propriété suivante

Propriété 4 *La fonction* arccos *est dérivable sur* $]-1, 1[$ *et*

$$\forall\ x \in]-1, 1[,\ (\arccos)'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

2.3 La fonction arctangente

$x \mapsto \tan(x)$ est continue sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Elle n'est pas bijective sur $\mathcal{D}$, par exemple $\tan(0) = \tan(\pi) = 0$. **On va se restreindre à l'intervalle** $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

$x \mapsto \tan(x)$ est continue et strictement croissante sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. D'après le théorème vu dans le chapitre 4, elle est bijective de $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $J = \mathbb{R}$. On note arctan sa réciproque.

Propriété 5 *La fonction* arctan *(arctangente) est définie, continue et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. *Voir tableau.*

$$\arctan\ :\ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ x \mapsto \arctan(x) \end{array}$$

La fonction arctan *est une fonction impaire sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \tan(\arctan(x)) = x$$
$$\forall\ x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,\ \arctan(\tan(x)) = x.$$

- **Tableau de variations de la fonction** arctan. Voir tableau
- **Interprétation** Si $y \in \mathbb{R}$, comment interpréter $\arctan(y)$? Comment connaître la valeur de $\arctan(y)$ (pour quelques valeurs remarquables de y) ?

  Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\arctan(y)$ *est un angle appartenant à l'intervalle* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *dont la tangente vaut* y. Voir tableau.
- **Représentation graphique 3** On se place dans un repère orthonormé. Voir tableau

  Remarques Lorsqu'on a étudié la fonction tangente, on a démontré que les droites d'équation $x = \frac{-\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$ étaient des asymptotes (verticales) pour sa courbe représentative. On avait déduit ce résultat car $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to\frac{-\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$.

Par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$, on obtient que la fonction arctangente admet deux asymptotes horizontales les droites d'équation $y = \dfrac{\pi}{2}$ au voisinage de $+\infty$ et $y = \dfrac{-\pi}{2}$ au voisinage de $-\infty$. En effet, $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$ et $\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = \dfrac{-\pi}{2}$.

- **Dérivabilité**

  On applique ici le théorème 1 du paragraphe 1 pour établir le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée de la fonction arctangente.

  La fonction tan est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et sa dérivée ne s'annule pas sur cet intervalle

  $$\forall\ x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,\ (\tan)'(x) = 1 + \tan^2(x) \neq 0$$

  Soit $y = \tan(x)$ où $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a alors $y \in \mathbb{R}$. D'après le théorème 1 du paragraphe 1, la fonction arctan est dérivable en y et

  $$(\arctan)'(y) = \frac{1}{1 + \tan^2(x)} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(y))}$$

  Or pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\tan^2(\arctan(y)) = y^2$.

On vient de démontrer la propriété suivante

Propriété 6 *La fonction* arctan *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ (\arctan)'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

Pour exprimer un angle dont la valeur n'est pas une valeur remarquable, les physiciens utilisent le plus souvent la fonction arctangente.

3 Applications importantes : exercices de référence

Exercice 3 *Pour bien comprendre*

1. On considère les angles $\theta_1 = \arccos(\dfrac{1}{\sqrt{5}})$ et $\theta_2 = -\arccos(\dfrac{1}{\sqrt{5}})$.

   a) A quel intervalle l'angle θ_1 appartient-il ? Quelle est la valeur de son cosinus, le signe de son sinus ? Pouvez-vous calculer la valeur exacte de son sinus ?

b) Liens entre θ_1 et θ_2 (au niveau de la valeur du cosinus, du sinus, de la tangente)?

2. On considère les angles $\theta_1 = \arctan(2)$ et $\theta_2 = \arctan(2) + \pi$.

   a) A quel intervalle l'angle θ_1 appartient-il ? Quelle est la valeur de sa tangente, le signe de son cosinus et de son sinus ?

   b) Liens entre θ_1 et θ_2 (au niveau de la valeur de la tangente, du cosinus et du sinus)?

3. On considère les angles $\theta_1 = \arcsin(\dfrac{1}{\sqrt{10}})$ et $\theta_2 = \pi - \arcsin(\dfrac{1}{\sqrt{10}})$.

   a) A quel intervalle l'angle θ_1 appartient-il ? Quelle est la valeur de son sinus, le signe de son cosinus ? Calculer la valeur de son cosinus ?

   b) Liens entre θ_1 et θ_2 (au niveau de la valeur du cosinus et du sinus)?

Exercice 4. Application importante

Donnez l'écriture exponentielle des nombres complexes suivants :
$z_1 = 1 + 2j$ et $z_2 = -1 + 2j$.
Remarque : on exprimera l'argument des deux nombres complexes de trois manières différentes : d'abord en utilisant la fonction arccos puis la fonction arctan, enfin la fonction arcsin.