Chapitre 4

Généralités sur les fonctions (partie II)

---

1 Rappels et compléments sur les bijections

Définition 1 *Soit E et F deux ensembles, et $f : E \to F$ une application. On dit que f est une bijection de E dans F si pour tout $y \in F$, il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$.*

Autrement dit : f est bijective de E dans F, si tout élément de F admet un antécédent unique dans E par f, ou encore pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet une solution unique $x \in E$.
Il est **très important** de préciser les ensembles E et F !

Définition 2 *Si $f : E \to F$ est une bijection alors il existe une application unique appelée l'application réciproque de f noté f^{-1} qui vérifie*

$$f^{-1} : F \to E$$

et

$$\forall x \in E, f^{-1} \circ f(x) = x \ ; \ \forall y \in F, f \circ f^{-1}(y) = y.$$

L'application f^{-1} est une bijection de F dans E.

Remarque Si f est bijective de E dans F alors pour tout $y \in F$ et $x \in E$, on peut écrire

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

Exemples 1 A connaître par coeur ! Voir tableau.

- Fonction "carrée" $x \mapsto x^2$ bijective ou pas ? Fonction "cube" $x \mapsto x^3$ bijective ou pas ?
- Fonction logarithme népérien et fonction exponentielle sont des bijections (à détailler).
- Fonction trigonométriques (cosinus, sinus et tangente) ne sont pas bijectives sur leur domaine de définition (à détailler).

1.1 Comment établir qu'une fonction est bijective ?

Dans la pratique, on peut vous demander de démontrer qu'une fonction de E dans F est bijective : utile par exemple pour la résolution d'une équation de la forme $y = f(x)$ pour savoir s'il y a une unique solution ou pour la résolution d'inéquation de la forme $f(x) \leq \alpha$ (ou $f(x) \geq \alpha$).
Comment répondre à cette question ?
On admet le théorème suivant :

Théorème 1 *Soit f une fonction* **continue et strictement monotone** *sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors f est bijective de I sur $J = f(I)$. Son application réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone sur J (elle a le même sens de variation que f).*

A noter que J est un intervalle de $\mathbb{R}$ car f est continue (d'après le théorème des valeurs intermédiaires).

En résumé pour établir qu'une fonction est bijective sur I :

- on montre que f est continue sur I,
- on montre que f est strictement monotone sur I.

En appliquant le théorème, on conclut que f est bijective de I dans $J = f(I)$.
Enfin, on rappelle le lien qui existe entre le graphe de f et de sa réciproque (dans un repère orthonormé).

Théorème 2 *Dans un repère orthonormé, une application bijective et sa réciproque ont des représentations graphiques symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.*

2 Dérivée d'une fonction

2.1 Dérivée en un point

Définition 3 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in]a, b[$. On appelle taux d'accroissement de f en x_0, le rapport*

$$\Delta = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ou encore si on pose $x = x_0 + h$,

$$\Delta = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Interprétation graphique 1 On se place dans un repère orthonormé. Δ est le coefficient directeur de la droite passant par les points M de coordonnées $(x, f(x))$ et M_0 de coordonnées $(x_0, f(x_0))$
ou de la droite passant par M de coordonnées $(x_0+h, f(x_0+h))$ et M_0 de coordonnées $(x_0, f(x_0))$. Voir tableau.

Définition 4 *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *et* $x_0 \in]a,b[$. *On dit que* *f est dérivable en x_0* *si la limite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(limite du taux d'accroissement de f en x_0) existe et est finie. Dans ces conditions, on note

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$f'(x_0)$ est appelé la dérivée de f en x_0, on dit aussi le "nombre dérivé de f en x_0".

On a aussi, en utilisant la deuxième version du taux d'accroissement (où on pose $x = x_0 + h$), la définition suivante :

Définition 5 *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *et* $x_0 \in]a,b[$. *On dit que* *f est dérivable en x_0* *si la limite*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

(limite du taux d'accroissement de f en x_0) existe et est finie. Dans ces conditions, on note

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Dans les exercices, on utilise la définition 4 ou 5 suivant le contexte de l'exercice.

Exemple 2 Montrons que f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable en $x_0 = 1$. Voir tableau.

On a également une autre définition possible pour la dérivabilité de f en x_0 (plus délicate mais utile parfois).

Définition 6 *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *et* $x_0 \in]a,b[$. *On dit que* *f est dérivable en x_0* *s'il existe un réel A et une fonction ε tels que*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hA + h\varepsilon(h), \text{ où } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

Dans ces conditions, on note $A = f'(x_0)$ (le nombre dérivé de f en x_0).

Propriété 1 *Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.*

Démonstration Voir tableau.

Attention La réciproque n'est pas vraie. Il existe des fonctions continues en un point qui ne sont pas dérivables en ce point.
A retenir dérivable $\Rightarrow$ continue mais la réciproque est fausse !

Exemple 3 C'est l'exemple le plus classique (à connaître). La fonction valeur absolue, $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0. Voir tableau.

Interprétation géométrique de la dérivée en un point.

Soit f dérivable en x_0. On considère le plan muni d'un repère orthonormé et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans ce repère. On note M_0 le point de $\mathcal{C}_f$ de coordonnées $(x_0, f(x_0))$, M le point de $\mathcal{C}_f$ de coordonnées $(x, f(x))$ "proche" de x_0. On rappelle que $\Delta = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est le coefficient directeur de la droite (MM_0).

Si le point M tend vers le point M_0 (ce qui revient à dire que x tend vers x_0), la droite (MM_0) tend vers la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point M_0. On a donc le coefficient directeur Δ de la droite (MM_0) qui tend vers le coefficient directeur de la tangente *i.e.*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point M_0. Voir tableau.

On déduit alors la propriété suivante :

Propriété 2 *Si f est dérivable en x_0, alors la courbe représentative de f dans un repère orthonormé admet une tangente au point M_0 de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ qui a pour équation :*

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$f'(x_0)$ est le coefficient directeur (la pente) de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en M_0.

Remarque importante Soit f non dérivable en x_0 mais telle que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$$

Alors on généralise la notion de tangente en disant que dans ces conditions la courbe représentative de f, $\mathcal{C}_f$, admet une tangente verticale au point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ d'équation $x = x_0$. Donnons un exemple avec la fonction racine carrée.

Exemple 4 $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0 mais sa courbe représentative admet une tangente verticale au point de coordonnées $(0, f(0)) = (0, 0)$.

Remarque Avec les notions de limite à droite et à gauche vues dans le chapitre précédent, on peut définir la notion de dérivée à droite et à gauche en un point. On dit que f est dérivable à droite en x_0 si $\displaystyle\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existe et est finie. On note

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

le nombre dérivé à droite de f en x_0. En adaptant, vous pouvez définir la notion de dérivée à gauche en x_0.

2.2 Fonction dérivée

Définition 7 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable sur $]a,b[$ si f est dérivable en tout point de cet intervalle. On notera $f' :]a,b[\to \mathbb{R}$ sa dérivée.*

Dérivées successives

Si f est dérivable sur $]a,b[$, on note f' sa dérivée, si f' est également dérivable sur $]a,b[$, on notera f'' sa dérivée (appelée dérivée seconde de f), ainsi de suite.... On définit ainsi les dérivées successives de f.

Définition 8 *Soit n un entier naturel. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]a,b[$ si $f^{(n)}$ (dérivée nième de f) existe et est continue sur $]a,b[$.*

Remarques importantes

- Si $n=1$, f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$ si f est dérivable sur $]a,b[$ et si f' est continue sur $]a,b[$.
- Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout entier n sur $]a,b[$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a,b[$.

3 Dérivées usuelles et règles de calculs

3.1 Fonctions usuelles

Pour chaque fonction f, on note son domaine de définition $\mathcal{D}_f$ et son domaine de dérivabilité D'_f.

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$	$f(x) = C,\ C \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$D'_f = \mathbb{R}$
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$	$f(x) = x^n,\ n \geq 1$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D'_f = \mathbb{R}$
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$D'_f = \mathbb{R}^*$
$\mathcal{D}_f = [0,+\infty[$	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$D'_f =]0,+\infty[$
$\mathcal{D}_f =]0,+\infty[$	$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$D'_f =]0,+\infty[$
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$D'_f = \mathbb{R}$
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$	$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$D'_f = \mathbb{R}$
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$	$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$D'_f = \mathbb{R}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ $\quad f(x) = \tan(x) \quad f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} \quad D'_f = D_f$

Ce tableau sera complété dans les chapitres suivants.

Exercice 1 En utilisant les rappels effectués dans ce début de chapitre, montrez que

$$\sin x \underset{0}{\sim} x$$

Établir cette équivalence, revient à montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.
Voir tableau.

3.2 Règles de calcul

Propriété 3 *Soit f et g dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors*

- *$f + g$ est dérivable sur I et $(f+g)' = f' + g'$.*
- *fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.*
- *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, αf est dérivable sur I et $(\alpha f)' = \alpha f'$.*
- *Si g ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

En particulier, si g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{1}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = \dfrac{-g'}{g^2}$.

A partir des dérivées usuelles rappelées dans le paragraphe précédent et la propriété ci-dessus, on peut facilement déduire :

Propriété 4

- *Les fonctions polynômiales sont dérivables sur $\mathbb{R}$.*
- *Les fractions rationnelles (= quotients de polynômes) sont dérivables partout où leur dénominateur ne s'annule pas. Elles sont donc dérivables sur leur domaine de définition (et de continuité).*

Théorème 3 *Théorème fondamental sur la dérivée d'une composée*
Soit $f : I \to J$ dérivable sur I et $g : J \to K$ dérivable sur J alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I,\ (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$$

Remarque Importante (à retenir) Le plus difficile souvent est de déterminer le domaine de dérivabilité d'une fonction composée du type $g \circ f$. Si on applique le théorème ci-dessus, la fonction $g \circ f$ sera dérivable en tout point x où f est dérivable et $f(x)$ appartient au domaine de dérivabilité de g.
A retenir Si on note D'_f le domaine de dérivabilité de f et D'_g le domaine de dérivabilité de g alors le domaine de dérivabilité de $g \circ f$ est déterminé par

$$\boxed{\mathcal{D}'_{g\circ f} = \{x \in \mathcal{D}'_f \text{ tels que } f(x) \in \mathcal{D}'_g\}}$$

Exemples Comment appliquer ce théorème fondamental qui permet de dériver toute fonction composée ?

On va retrouver, ici, grâce au théorème fondamental, la dérivée d'un certain nombre de fonctions composées (vues au lycée).

- Soit h définie par $h(x) = \ln(f(x)) = (g \circ f)(x)$ où $g(x) = \ln(x)$. C'est bien une fonction composée. D'après le théorème 1, h sera dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}$ où f est dérivable et $f(x) > 0$ (car la fonction ln est dérivable sur $]0, +\infty[$).

  On a

  $$\mathcal{D}'_{g\circ f} = \{x \in \mathcal{D}'_f \text{ tels que } f(x) \in \mathcal{D}'_g =]0, +\infty[\} = \{x \in \mathcal{D}'_f \text{ tels que } f(x) > 0\}$$

  Par ailleurs, en tout point x satisfaisant ces deux conditions, on a

  $$h'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x) = \frac{1}{f(x)} \times f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

- Soit h définie par $h(x) = e^{f(x)} = (g \circ f)(x)$ où $g(x) = e^x$. C'est bien une fonction composée. D'après le théorème 1, h sera dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}$ où f est dérivable car $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (donc pas de contrainte ici sur le domaine de valeurs de f).

  $$\mathcal{D}'_{g\circ f} = \{x \in \mathcal{D}'_f \text{ tels que } f(x) \in \mathcal{D}'_g = \mathbb{R}\} = \{x \in \mathcal{D}'_f\} = D'_f$$

  Par ailleurs, en tout point x où f est dérivable, on a

  $$h'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x) = e^{f(x)} \times f'(x) = f'(x)e^{f(x)}$$

- Soit h définie par $h(x) = \sqrt{f(x)} = (g \circ f)(x)$ où $g(x) = \sqrt{x}$. C'est bien une fonction composée. D'après le théorème 1, h sera dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}$ où f est dérivable et $f(x) > 0$ (car la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$).

$$\mathcal{D}'_{g\circ f} = \{x \in \mathcal{D}'_f \text{ tels que } f(x) \in \mathcal{D}'_g =]0,+\infty[\} = \{x \in \mathcal{D}'_f \text{ tels que } f(x) > 0\}$$

Par ailleurs, en tout point x satisfaisant ces deux conditions, on a

$$h'(x) = (g\circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \times f'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

- Soit h définie par $h(x) = \cos(\omega x) = (g \circ f)(x)$ où $g(x) = \cos(x)$ et $f(x) = \omega x$. C'est bien une fonction composée. D'après le théorème 1, h sera dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}$: en effet f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynomiale) à valeurs dans $\mathbb{R}$ et g est dérivable sur $\mathbb{R}$, du coup pas de souci pour dériver la composée.

$$\mathcal{D}'_{g\circ f} = \{x \in \mathcal{D}'_f = \mathbb{R} \text{ tels que } f(x) \in \mathcal{D}'_g = \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

  Et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h'(x) = (g\circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x) = -\sin(\omega x) \times \omega = -\omega \sin(\omega x)$$

- etc....

Au lieu d'apprendre chaque dérivée de fonction composée, il est judicieux d'apprendre le théorème 1 et de savoir correctement l'appliquer.

Exercice 2

1. Soit h définie par $h(x) = \sqrt{\dfrac{x+3}{x-1}}$.
   a) Déterminer avec le plus grand soin, le domaine de dérivabilité de h.
   b) Calculer sa dérivée.
2. Mêmes questions avec h définie par $h(x) = \ln(x^2 + 3x + 2)$.

4 Étude des variations d'une fonction

Le sens de variation d'une fonction dépend du signe de sa dérivée. En effet, on admet le théorème suivant :

Théorème 4 *Soit f dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors*

i) f est constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

ii) f est strictement croissante sur I si et seulement $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$.

iii) f est strictement décroissante sur I si et seulement $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$.

L'étude du sens de variation des fonctions dérivables est ramené à l'étude du signe de la dérivée.

4.1 Application à la recherche d'extremum

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

- on dit que f admet un maximum (absolu) en x_0 si

$$\forall x \in I,\ f(x) \leq f(x_0)$$

- on dit que f admet un minimum (absolu) en x_0 si

$$\forall x \in I,\ f(x) \geq f(x_0)$$

- on dit que f admet un maximum local (relatif) en x_0 s'il existe un voisinage V ($V \subset I$) de x_0 tel que

$$\forall x \in V,\ f(x) \leq f(x_0)$$

- on dit que f admet un minimum local (relatif) en x_0 s'il existe un voisinage V ($V \subset I$) de x_0 tel que

$$\forall x \in V,\ f(x) \geq f(x_0)$$

Propriété 5 *(Condition nécessaire) Soit f une fonction dérivable sur I et $x_0 \in I$. Si f admet un extremum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.*

Attention Cette condition est nécessaire mais pas suffisante. La fonction $x \mapsto x^3$ est dérivable en 0, sa dérivée s'annule en 0 mais cette fonction n'admet pas d'extremum en 0. Il n'est pas nécessaire non plus que la fonction soit dérivable en un point pour admettre un extremum en ce point : considérer la fonction $x \mapsto |x|$. Elle n'est pas dérivable en 0 mais elle admet un minimum absolu en 0.

Propriété 6 *(Condition suffisante) Soit f une fonction dérivable sur I et $x_0 \in I$. Si f' s'annule et change de signe en x_0 alors f admet un extremum local en x_0.*

5 Différentielle d'une fonction

En mathématiques mais également en physique vous avez souvent utilisé la notion de différentielle : par exemple en électricité dans une EDL d'ordre 1, il apparait $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ ou encore en mathématiques lorsqu'on note une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, on utilise dans l'intégrale l'élément différentiel $\mathrm{d}x$....

Essayons d'expliquer cette notation et surtout que représente-t-elle ? Rappelons la définition 6 vue au tout début de ce chapitre.

f est dérivable au point a s'il existe une fonction ε telle que

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h) \text{ où } \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$$

On considère l'application notée $\mathrm{d}f_a$ et appelée la différentielle de f au point a :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ h &\mapsto f'(a)h \end{aligned}$$

En physique (mais aussi en maths) on omet le point a et on la note $\mathrm{d}f$ (différentielle de f). On a donc pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{d}f(h) = f'(a)h$$

Dans la pratique h qui représente un petit accroissement de la variable (entre le point a et le point $a+h$) se note $\mathrm{d}x$ ou $\mathrm{d}t$ etc...Essayons d'expliquer...
Considérons un cas particulier : on choisit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $g'(a) = 1$. Donc pour tout $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{d}g_a(h) = g'(a)h = h$$

Autrement dit $\mathrm{d}g$ ne dépend pas du point a, on a $\mathrm{d}g(h) = \mathrm{d}x(h) = h$. On notera désormais h (un petit accroissement de la variable) $\mathrm{d}x$. On déduit alors que si f est une fonction dépendant de la variable x alors

$$\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x$$

Si f est une fonction qui dépend de la variable t, alors

$$\mathrm{d}f = f'(t)\mathrm{d}t$$

etc..

Exemples

- Lorsque dans vos EDL d'ordre 1 en physique, il apparait $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ on a simplement $i'(t)$: en effet i est une fonction de la variable t alors $\mathrm{d}i = i'(t)\mathrm{d}t$ donc $i'(t) = \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.
- Prenons f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$, alors $\mathrm{d}f = \cos(x)\mathrm{d}x$.
- Prenons h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = \cos(t)$, alors $\mathrm{d}h = -\sin(t)\mathrm{d}t$.
- Prenons g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \ln(x)$ alors $\mathrm{d}g = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.
- ...

Voir tableau. Interprétation géométrique de la différentielle.