Chapitre 3

Généralités sur les fonctions.

---

1 Rappels et compléments

1.1 Ensemble de définition

Soit f une fonction définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $x \in \mathcal{D}$, $f(x)$ est l'image de x par f, c'est un réel. On note

$$f \ : \ \begin{array}{l} \mathcal{D} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{array}$$

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } f(x) \text{ existe}\}$$

On dit que $\mathcal{D}$ est le domaine de définition de f. Pour déterminer $\mathcal{D}$ il suffit de savoir répondre à la question suivante :

Pour quelles valeurs de x, ai-je le droit de calculer $f(x)$? Ai-je le droit tout le temps (pas de contrainte), dans ces conditions $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ ou existe-t-il des valeurs interdites et dans ces conditions le domaine de définition de f est une partie de $\mathbb{R}$ simplement.
Le plus souvent, on note $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition d'une fonction f.
Voyons quelques exemples (à connaître) par coeur une fois pour toute.

Exemples

- Les fonctions polynomiales sont définies sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions cosinus et sinus sont définies sur $\mathbb{R}$.
- Les fractions rationnelles (quotients de polynômes) sont définies partout où le dénominateur est différent de 0. Par exemple soit f définie par $f(x) = \dfrac{x+5}{x-1}$. Pour quelles valeurs de x, a-t-on le droit de calculer $f(x)$? Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tels que le dénominateur soit non nul. Soit $\mathcal{D}_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[= \mathbb{R} - \{1\}$.
- $x \mapsto e^x$ est défini sur $\mathbb{R}$.
- $x \mapsto \ln(x)$ est défini sur $]0, +\infty[$.
- $x \mapsto \sqrt{x}$ est défini sur $[0, +\infty[$.
- La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} - \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$.

Il ne faut pas confondre le **domaine de définition** (départ, cela concerne les valeurs de x) de la fonction f avec son **domaine de valeurs** (à l'arrivée, cela concerne les valeurs de $f(x)$). Graphiquement, si on représente la courbe de la fonction f, le domaine de définition se lit sur l'axe des abscisses, le domaine de valeurs se lit sur l'axe des ordonnées.

Remarque Si $\mathcal{D}$ est le domaine de définition de f,

$$f(\mathcal{D}) = \{f(x)\ ;\ x \in \mathcal{D}\}$$

est appelé l'image de $\mathcal{D}$ par f. C'est son domaine de valeurs.
Souvent on dit par facilité que f est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et cela est suffisant. Parfois, il est nécessaire d'être plus précis dans certains exercices. Quelques exemples :

- Les fonctions cosinus et sinus sont définies sur $\mathbb{R}$ (aucune valeurs interdites). Par contre elles sont à valeurs dans $[-1, 1]$.

  En effet pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

  $-1 \leq \sin(x) \leq 1$. On peut écrire :

  $$f \;:\; \begin{array}{l} \mathbb{R} \to [-1, 1] \\ x \mapsto \cos(x) \end{array}$$

  et

  $$g \;:\; \begin{array}{l} \mathbb{R} \to [-1, 1] \\ x \mapsto \sin(x) \end{array}$$

- La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ (aucune valeur interdite) à valeurs dans $]0, +\infty[$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$. On écrit

  $$f \;:\; \begin{array}{l} \mathbb{R} \to]0, +\infty[\\ x \mapsto e^x \end{array}$$

1.2 Fonctions composées

En mathématiques, on est souvent amené à composer des fonctions : on appelle **composée de f suivie de g** la fonction notée $g \circ f$ (on lit "g rond f") définie par

$$g \circ f(x) = g[f(x)]$$

Peut-on toujours composer des fonctions ? La réponse est NON. Quels problèmes rencontre-t-on ?
Commentaire *Lorsqu'on calcule l'image de x par la composée $g \circ f$ on calcule d'abord $f(x)$ puis $g[f(x)]$.*

La contrainte est la suivante : elle concerne les domaines de définition et de valeurs des fonctions f et g.
En effet, si on note D_f le domaine de définition de f et $\mathcal{D}_g$ le domaine de définition de g, la fonction $g \circ f$ aura pour domaine de définition

$$\boxed{\mathcal{D}_{g\circ f} = \{x \in \mathcal{D}_f \text{ tels que } f(x) \in \mathcal{D}_g\}}$$

Une remarque évidente : le domaine de définition de la fonction $g \circ f$ est inclus dans $\mathcal{D}_f$. Il ne peut pas être plus grand !

Commentaire *Autrement dit, la fonction $g \circ f$ a un sens s'il existe des valeurs de $x \in \mathcal{D}_f$ pour lesquelles $f(x) \in \mathcal{D}_g$.*

Exemple 1

Soit la fonction h définie par $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Mettre en évidence que h est une composée de fonctions. Quel est son domaine de définition ?

Exercice 1 Déterminez le domaine de définition des fonctions h et g définies par

$$h(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{x-3}\right), \quad g(x) = \sqrt{(x+1)(x-3)}$$

1.3 Limites : compléments

Ici vous devez réviser ce que vous avez vu au lycée sur les limites (classes de première et de terminale). Vous devez connaître par exemple les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions usuelles (fonctions polynomiales, fonction exponentielle, fonction ln etc..). Vous devez également vous rappeler les opérations possibles sur les limites (sommes, produits, quotients...) et ce qui n'est pas possible, les formes indéterminées (cas où on ne peut pas conclure).

Rappels

- $+\infty + (-\infty)$ est une forme indéterminée,
- $\infty \times 0$ est une forme indéterminée,
- $\dfrac{0}{0}$ et $\dfrac{\infty}{\infty}$ sont des formes indéterminées,
- 0^0, ∞^0 et 1^∞ sont des formes indéterminées.

On va voir tout au long de l'année des méthodes qui nous permettront de lever des indéterminations et on pourra alors calculer ces limites dans certains cas.

Si x_0 est un réel, on peut tendre vers x_0 par valeurs supérieures (on tend vers x_0 par la droite) ou on peut tendre vers x_0 par valeurs inférieures (on tend vers x_0 par la gauche). On peut définir ainsi la notion de limite à droite et à gauche d'une fonction en un point x_0.

On notera :

$$\lim_{{x_0}^+} f = \lim_{x \to {x_0}^+} f(x)$$

la limite à droite de f en x_0 (si elle existe) et

$$\lim_{{x_0}^-} f = \lim_{x \to {x_0}^-} f(x)$$

la limite à gauche de f en x_0 (si elle existe). On a alors la propriété suivante :

Propriété 1 *La fonction f admet une limite en x_0 si et seulement si* $\lim_{x_0^+} f = \lim_{x_0^-} f$. *Dans ces conditions,*

$$\lim_{x_0} f = \lim_{x_0^+} f = \lim_{x_0^-} f$$

Donnons un exemple :

Exemple 2 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

Représentez graphiquement la fonction f, calculez $\lim_{0^-} f$ et $\lim_{0^+} f$. Que peut-on déduire pour la limite de f en 0 ?

Attention ces notions de limites à droite et à gauche sont utiles uniquement pour certains types de fonctions (pas pour toutes les fonctions). On les utilisera pour des fonctions f qui n'ont pas la même définition à gauche et à droite d'un point.

Considérons un deuxième exemple : la fonction "partie entière"notée E.

Exercice 2

Pour tout x réel, on appelle partie entière de x le plus grand entier noté $E(x)$ qui vérifie $E(x) \leq x$. Représenter graphiquement la fonction E.
Calculez $\lim_{1^-} E$ et $\lim_{1^+} E$. Que peut-on déduire pour la limite de E en 1 ?

Exercice 2Bis

Soit f une fonction périodique de période $T = 2$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -x+2 & \text{si } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Représentez graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2, 4]$. Calculez la limite de f au point $x = 1$.

1.4 Fonctions équivalentes

x_0 désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Définition 1 soit f et g deux fonctions non nulles au voisinage de x_0. On dit que les fonctions f et g sont équivalentes en x_0 si on peut écrire

$$f(x) = g(x)\big[1 + \varepsilon(x)\big] \text{ où } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

ou encore

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

On note $f \underset{x_0}{\sim} g$ ou encore $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$.

Exemple 3 Soit f définie par $f(x) = 4x^2 - x + 1$, alors $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 4x^2$. Voir tableau

Propriété 2 *Soit f et g deux fonctions non nulles au voisinage de x_0.*

- *Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si $\lim\limits_{x_0} f$ et $\lim\limits_{x_0} g$ existent alors $\lim\limits_{x_0} f = \lim\limits_{x_0} g$. Autrement dit : deux fonctions qui sont équivalentes en x_0 ont la même limite. Attention la réciproque n'est pas vraie !*
- *Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ alors $ff_1 \underset{x_0}{\sim} gg_1$. Autrement dit on peut multiplier des fonctions équivalentes en x_0.*
- *Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ alors $\dfrac{f}{f_1} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{g}{g_1}$. Autrement dit on peut quotienter des fonctions équivalentes en x_0.*

Exemple 3 (suite) Déduire de cette propriété, $\lim\limits_{x\to+\infty} f$ où f est définie par $f(x) = 4x^2 - x + 1$

Remarques très importantes. Attention ! Voir tableau

Propriété 3

a) Soit P un polynôme de degré n (fonction polynomiale), $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ alors

$$P(x) \underset{+\infty}{\sim} a_n x^n, \text{ et } P(x) \underset{-\infty}{\sim} a_n x^n.$$

b) Soit F une fraction rationnelle (quotient de deux polynômes),

$$F(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}.$$

Alors

$$F(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}, \text{ et } F(x) \underset{-\infty}{\sim} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}.$$

La démonstration de cette propriété est très simple (laissée en exercice). Pour a), on reprend la méthode de l'exemple 3 ci-dessus, on factorise cette fois par $a_n x^n$. pour démontrer b), on utilise a) et la propriété 2 (on peut quotienter des équivalents).

Exercice 3 Donnez un équivalent pour chacune des fonctions suivantes en $+\infty$ et en déduire leur limite en $+\infty$.

$$f(x) = 2x^3 + x,\ F(x) = \frac{3x-1}{2x+2},\ G(x) = \frac{-x^3+x^2+1}{3x^2+x+5},\ H(x) = \frac{x+1}{2x^2+3x+1}$$

On admet (pour le moment) le résultat suivant :

Propriété 4

$$\sin x \underset{0}{\sim} x$$

$\iff \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

Pour démontrer ce résultat, on attendra le chapitre suivant sur la dérivabilité ou on pourra également déduire ce résultat plus tard à l'aide des développements limités.

2 Continuité (notions)

2.1 Définitions

Définition 1 Soit f définie sur $\mathcal{D}$ (une partie de $\mathbb{R}$) et $x_0 \in \mathcal{D}$. On dit que f continue en x_0 si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Pour quelles raisons une fonction f n'est pas continue en un point x_0 ?

- Si f n'est pas définie en x_0. Par exemple, prenons la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$, f n'est pas définie en 0, par conséquent elle n'est pas continue en 0.
- Si f n'admet pas de limite en x_0. Prenons par exemple la fonction partie entière notée E (définie dans le paragraphe précédent), elle est définie en 1, $E(1) = 1$, or $\lim_{x \to 1} E(x)$ n'existe pas.
- Si f admet en x_0 une limite différente de $f(x_0)$. Donnons un exemple : soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ \\ 2 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

La fonction f est bien définie en 0 ($f(0) = 2$), par contre $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \neq f(0)$. Donc f n'est pas continue en 0.

Définition 2 Une fonction f est continue sur $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$ si f est continue en tout point de $\mathcal{D}$.

Remarque 1 Lorsqu'on représente graphiquement une fonction continue (sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$), cela signifie que pour tracer sa courbe, vous ne lèverez pas votre crayon.

Exemples à connaître

- Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions cosinus et sinus sont continues sur $\mathbb{R}$.
- $x \mapsto e^x$ est continu sur $\mathbb{R}$.
- $x \mapsto \ln(x)$ est continu sur $]0, +\infty[$.
- $x \mapsto \sqrt{x}$ est continu sur $[0, +\infty[$.

La plupart des fonctions usuelles que vous connaissez en mathématiques sont continues sur leur domaine de définition.
Attention La fonction partie entière est définie sur $\mathbb{R}$ par contre, elle est continue sur $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$. En tout point de $\mathbb{Z}$, elle n'est pas continue car elle n'admet pas de limite.

2.2 Propriétés des fonctions continues

Propriété 5 *Soit f et g continues sur $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors*

- *$f+g$, fg et λf sont continues sur $\mathcal{D}$.*
- *si $g \neq 0$ sur $\mathcal{D}$ alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur $\mathcal{D}$.*

Exemples à connaître (suite)

- Les fractions rationnelles (quotients de polynômes) sont continues partout où le dénominateur est différent de 0. Elles sont donc continues sur leur domaine de définition.
- La fonction tangente est continue sur $\mathbb{R} - \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ (*i.e.* sur son domaine de définition).

On admet le théorème suivant :

Théorème 1 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ $(a < b)$. Si $f(a)f(b) \leq 0$ (ce qui revient à dire que f(a) et f(b) sont de signe contraire) alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.*

Remarques

- $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe contraire, on suppose par exemple $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$, comme f est continue sur $[a,b]$ lorsqu'on trace sa représentation graphique sur $[a,b]$, on ne "lève pas le crayon" donc sa courbe représentative coupe forcément l'axe des abscisses.
- Une application importante de ce théorème concerne la résolution d'équation de la forme $f(x) = 0$. Si f est continue sur $[a,b]$ et si $f(a)f(b) \leq 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a,b]$.

On peut déduire de ce théorème, le théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 2 *Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)*
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ $(a < b)$. Alors pour tout réel d compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $d = f(c)$.

Remarques

- On va supposer que $f(a) < f(b)$ et $f(a) < d < f(b)$. Comme f est continue sur $[a,b]$ lorsqu'on trace sa représentation graphique sur $[a,b]$, on ne "lève pas le crayon" donc sa courbe représentative coupe forcément la droite d'équation $y = d$.
- Une application importante de ce théorème concerne la résolution d'équation de la forme $f(x) = d$. Si f est continue sur $[a,b]$ et si d est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ alors l'équation $f(x) = d$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a,b]$.

- Ce théorème nous montre également que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. Ce résultat est faux si la fonction n'est pas continue. Donnons un exemple ci-dessous.

Interprétations graphiques 1 et 2 Voir tableau

Exemple Cas d'une fonction qui n'est pas continue. Prenons la fonction partie entière, E est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Nous avons vu précédemment que la fonction E n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. L'image de l'intervalle $[0,1]$ par E n'est pas un intervalle (c'est un ensemble constitué des valeurs 0 et 1 seulement).

$$E([0,1]) = \{0,1\}$$

La partie suivante est à travailler seul, pour ceux qui veulent aller plus loin...

2.3 Prolongement par continuité

Posons le problème : soit f une fonction **non définie en** x_0 et telle que $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe et est finie. Posons $l = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

Puisque f n'est pas définie en x_0, f n'est pas continue en x_0. Alors on va définir une nouvelle fonction g qui prolonge f et qui est continue en x_0 en posant :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq x_0 \\ \\ l \text{ si } x = x_0 \end{cases}$$

On dit que g est le prolongement par continuité de f en x_0.

En effet g prolonge f : g est égale à f en tout point où f est définie, et g est définie en x_0 alors que f ne l'était pas ($g(x_0)$ existe, $g(x_0) = l$).

Vérifions que g est continue en x_0 :

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = l = g(x_0)$$

D'après la définition ci-dessus, g est continue en x_0.

Exercice 4 Montrez que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ est prolongeable par continuité en 0. Donnez son prolongement par continuité.

Correction On calcule d'abord $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Donc f admet une limite finie en 0, d'après ce qui précède, on peut prolonger la fonction f par continuité en 0. On note g son prolongement par continuité défini par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$