Chapitre 2

Transformation de Laplace

Introduction (Rappels)

Intégrale généralisées du type $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$

Définition Soit f une fonction intégrable sur tout intervalle de la forme $[a, x]$ où $x > a$. Ceci premet de définir la fonction : $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$. Si cette fonction admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, on dit que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge et

$$\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

Dans le cas contraire (si la limite n'existe pas ou si elle est infinie), l'intégrale généralisée est dite divergente.

1 Transformation de Laplace (du temporel dans le domaine de Laplace)

1.1 Définition et remarques

Définition 1 Soit f une fonction *causale* (fonction définie sur $\mathbb{R}$ et nulle si $t < 0$). On appelle transformée de Laplace de f la fonction F définie par

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\ e^{-pt}\ \mathrm{d}t$$

On note aussi $F = \mathcal{L}(f)$, l'opérateur $\mathcal{L}$ désignant la transformée de Laplace. On note (usuellement) p la variable pour F.

Dans ce chapitre, on va se limiter (pour faciliter les calculs) au cas où $p \in \mathbb{R}$. Dans la pratique (en physique : traitement du signal, automatique etc..), p peut désigner un nombre complexe, $p = \alpha + i\omega$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{R}$. La plupart des résultats que nous obtiendrons dans ce chapitre se généralise au cas où $p \in \mathbb{C}$.

Désormais, toutes les fonctions considérées dans ce chapitre (dans le domaine temporel) seront des fonctions causales.

Remarques 1

- La transformation de Laplace est un *opérateur* qui à une fonction f (qui dépend de la variable t, on dit souvent que f est dans le domaine temporel) associe une autre fonction $F = \mathcal{L}(f)$ sa transformée de Laplace (qui dépend de la variable p). On dit alors qu'on est passé dans le domaine de Laplace.

- La transformée de Laplace de f existe lorsqu'il existe des valeurs de $p \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t$ converge. L'ensemble de ces valeurs constitue le domaine de définition de F ($\mathcal{D}_F$) qui est aussi appelé domaine de Laplace de f.

- On peut montrer (cours sur les intégrales généralisées) que s'il existe un nombre réel s tel que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ e^{-st}\ \mathrm{d}t$ converge alors pour tout $p \geq s$, $F(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ e^{-pt}\ \mathrm{d}t$ existe. Par conséquent, $[s, +\infty[\subset \mathcal{D}_F$.

1.2 Calcul de la transformée de Laplace de quelques fonctions particulières

La plupart des calculs, représentations graphiques et résultats à apprendre (par coeur) de cette partie sont traités sur le tableau.

1.2.1 La fonction échelon unité

Propriété 1 *Soit f définie par $f(t) = \mathcal{U}(t)$ où*

$$\mathcal{U}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

On pose $F = \mathcal{L}(f)$ alors

$$F(p) = \frac{1}{p},\ p > 0$$

1.2.2 La fonction rampe

Propriété 2 *Soit f définie par $f(t) = t\,\mathcal{U}(t)$, on a donc*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

On pose $F = \mathcal{L}(f)$ alors

$$F(p) = \frac{1}{p^2},\ p > 0$$

1.2.3 La fonction puissance

Propriété 3 *Soit f définie par $f(t) = t^n\,\mathcal{U}(t)$ où $n \in \mathbb{N}$, on pose $F = \mathcal{L}(f)$ alors*

$$F(p) = \frac{n!}{p^{n+1}},\ p > 0$$

Démonstration A faire (exercice) La démonstration se fait par récurrence sur n. Vous vérifiez que c'est vrai pour $n = 0$ ou $n = 1$ (par exemple). Vous supposez que la propriété est vraie à l'ordre n et ensuite .....

1.2.4 La fonction exponentielle

Propriété 4 *Soit f définie par $f(t) = e^{at}\,\mathcal{U}(t)$ où $a \in \mathbb{R}$*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{at} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

On pose $F = \mathcal{L}(f)$ alors

$$F(p) = \frac{1}{p-a},\ p > a$$

1.2.5 Les fonctions sinusoidales

Propriété 5 *Soit f définie par $f(t) = \cos(\omega t)\,\mathcal{U}(t)$ où $\omega \in \mathbb{R}$*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \cos(\omega t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

On pose $F = \mathcal{L}(f)$ alors

$$F(p) = \frac{p}{p^2+\omega^2},\ p > 0$$

Propriété 6 *Soit f définie par $f(t) = \sin(\omega t)\,\mathcal{U}(t)$ où $\omega \in \mathbb{R}$*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \sin(\omega t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

On pose $F = \mathcal{L}(f)$ alors

$$F(p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2},\ p > 0$$

1.3 Conditions (suffisantes) d'existence de la transformée de Laplace

Définition 2 Fonction continue par morceaux (vue en MP1)

On dit que f est une fonction *continue par morceaux sur un intervalle* I de $\mathbb{R}$ si f est continue en tout point de I sauf éventuellement en un nombre fini de points en lesquels elle admet une limite à droite et une limite à gauche.

Définition 3 Fonction d'ordre exponentiel à l'infini

On dit que f est une fonction *d'ordre exponentiel à l'infini* s'il existe des réels $A > 0$, $\alpha > 0$ et $M > 0$ tels que pour tout $t > A$,

$$|f(t)| < M\ e^{\alpha t}$$

Toutes les fonctions rencontrées dans le paragraphe précédent sont des fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ et d'ordre exponentiel à l'infini.
On admet alors le théorème suivant :

Théorème 1 *Soit f une fonction continue par morceaux sur tout intervalle de la forme $[0, x_0]$ et d'ordre exponentiel à l'infini alors la transformée de Laplace de f existe pour tout $p > \alpha$ (où α est la constante définie ci-dessus)*

Autrement dit si f est une fonction continue par morceaux sur tout intervalle de la forme $[0, x_0]$ et d'ordre exponentiel à l'infini, on a $]\alpha, +\infty[\subset \mathcal{D}_F$ où $F = \mathcal{L}(f)$.

1.4 Principales propriétés de la Transformée de Laplace

1.4.1 Linéarité

Cette propriété provient de la linéarité de l'intégrale.

Propriété 7 *Soient f_1, f_2 deux fonctions telles que $\mathcal{L}(f_1)$ et $\mathcal{L}(f_2)$ existent et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ alors*

$$\mathcal{L}(\lambda f_1 + \mu f_2) = \lambda \mathcal{L}(f_1) + \mu \mathcal{L}(f_2)$$

On dit que la transformation de Laplace est linéaire.
Exemples 1

- soit f définie par

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t^2 - 3t + 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

  Autrement dit $f(t) = (t^2 - 3t + 1)\ \mathcal{U}(t)$. Calculez sa transformée de Laplace.

  Correction $f(t) = t^2\ \mathcal{U}(t) - 3t\ \mathcal{U}(t) + \mathcal{U}(t)$. On pose $F = \mathcal{L}(f)$, par linéarité

$$\forall p > 0,\ F(p) = \mathcal{L}(t^2\ \mathcal{U}(t)) - 3\mathcal{L}(t\ \mathcal{U}(t)) + \mathcal{L}(\mathcal{U}(t)) = \frac{2}{p^3} - \frac{3}{p^2} + \frac{1}{p}$$

- Calculez la transformée de Laplace de f définie par $f(t) = \mathrm{ch}(\omega t)\ \mathcal{U}(t)$.
- Calculez la transformée de Laplace de f définie par $f(t) = \mathrm{sh}(\omega t)\ \mathcal{U}(t)$.

1.4.2 Théorème du retard

On commence d'abord par expliquer ce que signifie qu'une fonction g est en retard de θ (où θ est un réel strictement positif) sur une fonction f dans le domaine du temps. On va donner

- une explication graphique : comment obtient-on la courbe de g à partir de celle de f ?
- une explication algébrique : comment exprime-t-on g en fonction de l'expression de f ?

Exemple 2 Considérons la fonction g en retard de 2 sur la fonction f définie par $f(t) = \mathcal{U}(t)$ (fonction échelon unité).

Si g est en retard de 2 sur f cela signifie en particulier que la valeur de g en 2 est égale à la valeur de f en 0. Plus généralement la courbe de g est "translatée" de 2 vers la droite par rapport à la courbe de f.
Alors g s'écrit :

$$g(t) = \mathcal{U}(t-2) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 2 \\ 1 & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

Revenons au cas général :

Propriété 8 *Si g est en retard de θ (où $\theta > 0$) sur f dans le domaine temporel alors*

$$g(t) = f(t-\theta)$$

ou encore

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \theta \\ f(t-\theta) & \text{si } t \geq \theta \end{cases}$$

La courbe représentative de g dans un repère orthonormé est obtenue en effectuant une translation de "θ vers la droite du repère" de la courbe représentative de f.

Maintenant on cherche à répondre à la question suivante : si g est en retard de θ où $\theta > 0$ sur f (dans le domaine temporel), existe-t-il un lien entre $G = \mathcal{L}(g)$ et $F = \mathcal{L}(f)$?
La réponse est donnée avec le théorème suivant :

Théorème 2 *Soit g en retard de θ où $\theta > 0$ sur f (dans le domaine temporel), on pose $G = \mathcal{L}(g)$ et $F = \mathcal{L}(f)$ (on suppose que F existe sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$). Alors*

$$G(p) = e^{-p\theta}F(p)$$

Remarque *un retard de θ dans le domaine temporel, correspond à la multiplication par $e^{-p\theta}$ (appelé facteur du retard) dans le domaine de Laplace.*

Démonstration (voir tableau)

Exercice 1
Soit g en retard de π sur la fonction f définie par $f(t) = \cos(t)\,\mathcal{U}(t)$.

- Donnez l'expression de g.
- Calculez la transformée de Laplace de $G = \mathcal{L}(g)$.

1.4.3 Produit par e^{at} dans le domaine temporel

Théorème 3 *Soit f une fonction dont on suppose que $F = \mathcal{L}(f)$ existe sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$. On pose $g(t) = e^{at} f(t)$ où $a \in \mathbb{R}$ alors si $G = \mathcal{L}(g)$, on a*

$$G(p) = F(p - a)$$

Remarque *Une multiplication par e^{at} dans le domaine temporel correspond à une translation dans le domaine de Laplace.*

Démonstration (Voir Tableau)

Exercice 2
Soient g et h définies repectivement par $g(t) = e^{-t}t^2\mathcal{U}(t)$ et $h(t) = e^t \sin(t)\,\mathcal{U}(t)$. Calculez les transformées de Laplace $G = \mathcal{L}(g)$ et $H = \mathcal{L}(h)$.

1.4.4 Dilatation (ou changement déchelle) dans le domaine temporel

Théorème 4 *Soit f une fonction dont on suppose que $F = \mathcal{L}(f)$ existe sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$. On pose $g(t) = f(at)$ où $a > 0$ alors si $G = \mathcal{L}(g)$, on a*

$$G(p) = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$$

Démonstration (Voir Tableau)

1.5 Fonction périodiques

On va donner un théorème spécifique qui nous permettra de calculer la transformée de Laplace de signaux T-périodiques sur $\mathbb{R}_+$.

Théorème 5 *Soit f une fonction causale T-périodique sur $\mathbb{R}_+$ et vérifiant les conditions du théorème d'existence (***Théorème 1***). On pose $F = \mathcal{L}(f)$ alors*

$$F(p) = \frac{\int_0^T f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t}{1 - e^{-pT}}$$

L'avantage de ce théorème c'est qu'il suffit de connaître l'expression de f sur l'intervalle $[0, T]$.

Exercice 3 (à faire seul)
A partir du théorème ci-dessus, calculez la transformée de Laplace des fonctions $t \mapsto \cos(t)\,\mathcal{U}(t)$ et $t \mapsto \sin(t)\,\mathcal{U}(t)$.

1.6 Dérivation et intégration dans le domaine temporel

1.6.1 Dérivée

- Intéressons nous à la dérivée première.

  On considère f qui vérifie les hypothèses du théorème d'existence (**Théorème 1**) et qui est dérivable par morceaux sur tout intervalle I de $\mathbb{R}$ (dérivable en tout point de I sauf éventuellement en un nombre fini de point), enfin on suppose f' continue par morceaux sur tout intervalle de la forme $[0, x_0]$ ($x_0 > 0$).

  Sous ces hypothèses, on a la propriété suivante (admise) qui donne un lien entre la transformée de Lapace de f et la transformée de Laplace de sa dérivée f' :

  Propriété 9 *Sous les hypothèses précédentes, si on pose $F = \mathcal{L}(f)$ et $F_1 = \mathcal{L}(f')$, alors*

$$F_1(p) = pF(p) - f(0^+), \text{ où } f(0^+) = \lim_{t \to 0^+} f(t)$$

- Généralisation

  Sous les bonnes hypothèses, si on applique le résultat précédent à f' et f'', on peut déduire un lien entre la transformée de Laplace de f'' et la transformée de Laplace de f. En effet

$$\mathcal{L}(f'') = p\mathcal{L}(f') - f'(0^+) = p\left(p\mathcal{L}(f) - f(0^+)\right) = p^2\mathcal{L}(f) - pf(0^+) - f'(0^+)$$

  Si on pose $F_2 = \mathcal{L}(f'')$ et $F = \mathcal{L}(f)$, on a donc

$$F_2(p) = p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+)$$

  On peut ainsi généraliser à l'ordre n pour établir un lien entre la transformée de Laplace de $f^{(n)}$ (dérivée nième de f) et la transformée de Laplace de f.

  Si on pose $F_n = \mathcal{L}(f^{(n)})$ ($n \geq 1$) et $F = \mathcal{L}(f)$, on a donc

$$F_n(p) = p^nF(p) - p^{n-1}f(0^+) - \cdots - f^{(n-1)}(0^+)$$

1.6.2 Primitive

Sous les bonnes hypothèses, soit g une primitive de f ; on note $G = \mathcal{L}(g)$ et $F = \mathcal{L}(f)$. Lien entre G et F ?
Si g est une primitive de f alors $g'(t) = f(t)$ (en tout point t où g est dérivable).
D'apès le paragraphe précédent $\mathcal{L}(g') = p\mathcal{L}(g) - g(0^+)$ donc

$$F(p) = pG(p) - g(0^+) \iff G(p) = \frac{F(p)}{p} + \frac{g(0^+)}{p}, \ p \neq 0$$

Remarques
On peut observer qu'une dérivation dans le domaine temporel correspond à la multiplication par p dans le domaine de Laplace (à une constante près) et que l'intégration dans le domaine temporel correspond à la division par p dans le domaine de Laplace (à une constante près).

Exemple Posons $g(t) = \displaystyle\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u$, alors g est la primitive de f qui s'annule en 0 ($g(0) = 0$). Si on pose $G = \mathcal{L}(g)$ et $F = \mathcal{L}(f)$ alors $G(p) = \dfrac{F(p)}{p}$.

2 Original : transformation inverse (du domaine de Laplace dans le domaine temporel)

Dans la première partie de ce chapitre on avait une fonction f (dans le domaine temporel) et on a essayé de calculer sa transformée de Laplace $F = \mathcal{L}(f)$ (en utilisant la définition pour quelques fonctions de référence ou des propriétés..). On dit que f un original de F.

ATTENTION Le problème posé mathématiquement c'est qu'il n'y a pas unicité de l'original f, en effet plusieurs fonctions f peuvent avoir la même transformée de Laplace. Donc problème si on veut à partir de F, déterminer la fonction f telle que $F = \mathcal{L}(f)$. On va donc rajouter une condition pour définir ce qu'on appellera l'original de F.

Dans la suite, on considèrera comme original f de F (et on dira que f est l'original de F) la fonction f continue sur le plus grand domaine possible et telle que $F = \mathcal{L}(f)$.

Comment déterminer l'original f de F ?

- On commence par regarder si F est une transformée de Laplace connue (transformée de Laplace de fonctions usuelles) directement ou par exemple en exploitant une des propriétés de la transformée de Laplace.

- Si on n'est pas dans le cas précédent et si F est une fraction rationnelle en p de la forme

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

  la méthode la plus simple pour déterminer l'original de F est la suivante :

  a) on décomopose la fraction F en éléments simples (voir cours MP1),
  b) on cherche l'original de chaque élément simple (la plupart des éléments simples sont les transformées de Laplace usuelles),
  c) pour trouver f on conclut en utilisant la linéarité.

Exercice 4 Déterminer l'original de la transformée de Laplace suivante.

$$F(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)}$$

2.1 Application de la Transformée de Laplace à la résolution d'équations ou de systèmes différentiels

On veut résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + te^t\, \mathcal{U}(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Cette équation est donnée dans le domaine temporel (l'inconnue y dépend du temps). La méthode de résolution est basée sur la détermination dans un premier temps de $Y = \mathcal{L}(y)$. On cherche d'abord la TL de la fonction y. Pour cela on va passer dans **le domaine de Laplace**. Que devient l'équation ? Voir tableau.

3 Multiplication par t^n dans le domaine temporel

On admet le résultat suivant :

Propriété 10 *Soit f une fonction qui vérifie les conditions du théorème d'existence de sa transformée de Laplace, on note $F = \mathcal{L}(f)$. Alors F est indéfiniment dérivable et pour tout $n \geq 1$, si on pose $g(t) = t^n f(t)$ et $G = \mathcal{L}(g)$ alors*

$$G(p) = \mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n F^{(n)}(p)$$

En particulier, si $n = 1$ alors $\mathcal{L}(tf(t)) = -F'(p)$.

Exercice 5 Calculer la transformée de Laplace de f définie par $f(t) = t\sin(t)\, \mathcal{U}(t)$.

4 Produit de convolution

Objectif : déterminer l'original de F où F est un produit de transformées de Laplace. On pose $F = F_1 \times F_2$ où $F_1 = \mathcal{L}(f_1)$ et $F_2 = \mathcal{L}(f_2)$. Comment déterminer l'original f de F ?
On admet le théorème suivant :

Théorème 6 *Soient f_1 et f_2 qui vérifient les conditions du théorème d'existence de leur transformée de Laplace, on note $F_1 = \mathcal{L}(f_1)$ et $F_2 = \mathcal{L}(f_2)$. Alors l'original de $F = F_1 \times F_2$ est la fonction f définie par*

$$\forall t \geq 0,\ \ f(t) = \int_0^t f_1(u) f_2(t-u)\ du$$

On note $f = f_1 * f_2$ (le produit de convolution de f_1 par f_2)

Remarques Le produit de convolution est commutatif.

$$f_1 * f_2 = f_2 * f_1$$

Exercice 6 Déterminez les originaux respectifs de F et G définies par

$$F(p) = \frac{1}{(p^2+1)^2},\ G(p) = \frac{p}{(p^2+1)^2}$$

5 Exercices

Exercice 1

1. On note f la fonction en retard de 5 sur la fonction échelon unité. Donnez l'expression de f puis représenter les deux fonctions dans un même repère orthonormé. Calculer la transformée de Laplace de la fonction f.
2. On considère les fonctions f, g, h définies par

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 3 \\ \\ 2 & t \geq 3 \end{cases} \qquad g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2 & 0 \leq t < 1 \\ -2 & t \geq 1 \end{cases} \qquad h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{3} & 0 \leq t < 2 \\ 0 & t \geq 2 \end{cases}$$

a) Représentez graphiquement chacune des trois fonctions puis donnez leur expression en utilisant la fonction échelon unité $\mathcal{U}$.

b) Calculez la transformée de Laplace de chacune de ces fonctions.

3. Reprendre les questions a) et b) avec la fonction φ définie par

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \leq t < 1 \\ -t + 2 & 1 \leq t < 2 \\ 0 & t \geq 2 \end{cases}$$

Exercice 2

On rappelle que $\mathcal{U}$ désigne la fonction échelon unité. On considère les fonctions f_1, f_2, f_3 définies par

$$\begin{aligned} f_1(t) &= (t-2)\,\mathcal{U}(t) \\ f_2(t) &= (t-2)\,\mathcal{U}(t-2) \\ f_3(t) &= t\,\mathcal{U}(t-2) \end{aligned}$$

a) Représentez graphiquement ces trois fonctions dans un même repère.

b) Une seule de ces trois fonctions est une fonction en retard. Déterminez cette fonction (on précisera la fonction de référence par rapport à laquelle elle est en retard).

c) Déterminez la transformée de Laplace de ces trois fonctions.

d) Comment s'écrit la fonction f en retard de 1 sur la fonction $t \mapsto t^2\mathcal{U}(t)$?

Exercice 3

1. Pour chacune de ces fonctions, déterminez la transformée de Laplace et précisez le domaine d'existence.

$$t \mapsto 2e^{3t}\,\mathcal{U}(t),\ t \mapsto 3t^3\,\mathcal{U}(t),\ t \mapsto (t-3)^2\,\mathcal{U}(t-3),\ t \mapsto (t-3)^2\,\mathcal{U}(t)$$

$$t \mapsto (\cos 2t + 3\sin 2t)\,\mathcal{U}(t),\ t \mapsto (\mathrm{ch}2t + \mathrm{sh}2t)\,\mathcal{U}(t),\ t \mapsto e^{-t}\cos t\,\mathcal{U}(t)$$

$$t \mapsto e^t \cos^2(\frac{t}{2})\,\mathcal{U}(t),\ t \mapsto t\cos(t)\,\mathcal{U}(t),\ t \mapsto e^t(t-1)^2\,\mathcal{U}(t).$$

2. Faites un résumé de toutes les propriétés utilisées dans cet exercice (propriétés qui ont facilité le calcul des transformées de Laplace). *A faire seul !*

Exercice 4 *Signaux périodiques*

On considère les fonctions 2-périodiques sur $\mathbb{R}_+$, f_1, f_2 définies de la façon suivante

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \leq t < 2 \end{cases} \qquad f_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \leq t < 1 \\ -t+2 & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

1. Représentez graphiquement chacune de ces fonctions sur $[-4, 4]$.
2. Déterminez leur transformée de Laplace.

Exercice 5 *Originaux : transformation inverse*

1. Déterminer les originaux des fonctions suivantes :

$$p \mapsto \frac{p}{p^2+4},\ p \mapsto \frac{8}{p^2+16}, p \mapsto \frac{3p+1}{p^2+9},\ p \mapsto \frac{1}{p^4},\ p \mapsto \frac{2}{p-3},\ p \mapsto \frac{p-3}{p^2+2p+5},\ p \mapsto \frac{1}{(p+1)^2}.$$

Note : on pourra remarquer que chaque fraction est un élément simple.

2. Déterminer les originaux des fonctions suivantes :

$$p \mapsto \frac{1}{p^2-16},\ p \mapsto \frac{pe^{-2p}}{p^2+3},\ p \mapsto \frac{1}{p^2-2p+1},\ p \mapsto \frac{p+1}{p^2-4p+8},\ p \mapsto \frac{p-1}{p^2-2p}.$$

Exercice 6 *Application à la résolution des équations différentielles avec conditions initiales : exercice de synthèse*

1. Soit a un nombre réel strictement positif. On considère la fonction $t \mapsto x(t)$ définie par

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} & t < 0 \\ 1 & \text{si} & 0 \leq t < a \\ 0 & \text{si} & t \geq a \end{cases}$$

   a) Donner l'expression de la fonction x à l'aide de la fonction échelon unité.
   b) Calculer sa transformée de Laplace.

2. On note F la fonction définie par $F(p) = \dfrac{1}{p(p^2+2p+5)}$, G la fonction définie par $G(p) = e^{-pa}F(p)$ et H la fonction définie par $H(p) = \dfrac{1}{p^2+2p+5}$. Déterminer les originaux respectifs de F, de G et de H.

3. Résoudre **en utilisant la transformée de Laplace** l'équation différentielle (avec conditions initiales) suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rl} y'' + 2y' + 5y & = x(t) \\ y(0) & = 0 \\ y'(0) & = 1 \end{array} \right.$$

Exercice 7 *Application à la résolution de systèmes différentiels avec conditions initiales*

Résoudre le système différentiel (avec conditions initiales) suivant en utilisant la transformée de Laplace.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & 2x(t) - y(t) \\ y'(t) & = & x(t) + y(t) \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{rcl} x(0) & = & 1 \\ y(0) & = & 0 \end{array} \right.$$

Nathalie Gonzalez, MCF Mathématiques, AMU, 19 novembre 2020, mis à jour le 15 septembre 2022