Chapitre 2

Les Fonctions trigonométriques.

---

1 Rappels : des propriétés utiles sur les fonctions

Définition 1 *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et T un réel strictement positif. On dit que f est une fonction T-périodique (ou de période T) si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$.*

Une conséquence importante pour la courbe représentative d'une fonction T-périodique :
pour représenter graphiquement une fonction T-périodique, il suffit de connaître sa courbe sur un intervalle de longueur T par exemple $[0, T]$ (ou $\left[\frac{-T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ etc..). Ensuite, une fois l'allure de la courbe connue sur l'intervalle de longueur T, il reste à reproduire le motif sur tout intervalle de longueur T. Lorsqu'une fonction est T-périodique sur $\mathbb{R}$, on peut restreindre son étude à tout intervalle de longueur la période.

Les fonctions naturellement périodiques en mathématiques sont les fonctions cosinus, sinus et tangente (et toutes celles que l'on peut fabriquer à partie de ces trois fonctions). Il existe d'autres type de fonctions périodiques très utiles en physique, plus souvent appelées signaux périodiques. On donnera un exemple à la fin de ce paragraphe.

Définition 2
Soit f une fonction définie sur $I = \mathbb{R}$ (ou sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $I = [-a, a]$ ou $I =]-a, a[$). On dira que

- *f est une fonction paire sur I si pour tout $x \in I$, $f(-x) = f(x)$.*
- *f est une fonction impaire sur I si pour tout $x \in I$, $f(-x) = -f(x)$.*

Propriété 1 *Dans un repère orthonormé du plan, la représentation graphique d'une fonction paire admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie. Dans un repère orthonormé du plan, la représentation graphique d'une fonction impaire admet l'origine du repère comme centre de symétrie.*

Exemple 1 Donnez l'exemple d'une fonction paire (respectivement impaire) sur $\mathbb{R}$. Représenter graphiquement ces deux fonctions dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Remarque 1 Lorsqu'une fonction est paire (respectivement impaire) sur I (avec $I = \mathbb{R}$ ou $I = [-a, a]$ ou $I =]-a, a[$), on peut se restreindre à l'étudier sur la moitié de l'intervalle, le reste de la courbe sera obtenu par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées (respectivement par rapport à l'origine du repère).

Exercice 1 On considère une fonction paire et périodique de période 2 définie par $f(x) = x - 1$ pour tout $x \in [0, 1]$. A partir de ces seules informations,

a) représenter la fonction f sur l'intervalle $[-4, 4]$.

b) Donnez l'expression de f sur $[1, 2]$, $[2, 3]$ et $[3, 4]$.

c) Que vaut f sur l'intervalle $[-2, -1]$?

Définition 3 *Soit f une fonction continue sur $I \subset \mathbb{R}$, on dira que F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et si pour tout $x \in I$,*

$$F'(x) = f(x).$$

Exemples 2 Donnez une primitive sur $\mathbb{R}$ pour chacune des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = 2x,\ f_2(x) = x,\ f_3(x) = -x^2,\ f_4(x) = e^x,\ f_5(x) = e^{4x}$$

2 Les fonctions sinusoïdales (rappels)

2.1 La fonction cosinus

$x \mapsto \cos(x)$ est définie, continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1, 1]$; cela signifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.

Elle est périodique de période 2π, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$. On peut donc restreindre son étude à tout intervalle de longueur 2π. On choisira $I = [-\pi, \pi]$.

La fonction cosinus est paire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos(x)$ (un angle et son opposé ont des cosinus égaux).
On peut donc limiter son étude à l'intervalle $J = [0, \pi]$. Le reste de la courbe (qui correspond à l'intervalle $[-\pi, 0]$ sera obtenu par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées).

On pourra noter que la fonction cosinus n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$ (par exemple $\cos(0) = \cos(2\pi) = 1$).

$x \mapsto \cos(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\cos)'(x) = -\sin(x)$$

Or pour tout $x \in [0, \pi]$, $\sin(x) \geq 0$, donc la fonction cosinus est strictement décroissante sur J.

- **Tableau des variations de la fonction** $\cos$ **et courbe représentative sur** I. Voir tableau.

- **Tableau de valeurs (cosinus des angles remarquables à apprendre)**. Voir tableau

- **Résoudre des équations en cosinus** : on est parfois amené à résoudre des équations de la forme

$$\cos(a) = \cos(b)$$

La méthode de résolution est basée sur les deux remarques suivantes : d'une part la fonction est 2π-périodique et d'autre part x et $-x$ ont le même cosinus (la fonction cosinus est paire).
On a alors la propriété suivante

Propriété 2

$$\cos a = \cos b \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a = b + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ a = -b + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Complément important. Soit ω un réel, la fonction $x \mapsto \cos(\omega x)$ est une fonction sinusoïdale de pulsation ω (on peut toujours se ramener à $\omega > 0$). Elle est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Elle est périodique et sa période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Le réel $f = \dfrac{1}{T}$ est appelée la fréquence et on a $\omega = 2\pi f$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\cos)'(\omega x) = -\omega \sin(\omega x)$$

2.2 La fonction sinus

$x \mapsto \sin(x)$ est définie, continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1, 1]$; cela signifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.

Elle est périodique de période 2π, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$. On peut donc restreindre son étude à tout intervalle de longueur 2π. On choisira $I = [-\pi, \pi]$.

La fonction sinus est impaire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin(x)$ (un angle et son opposé ont des sinus qui sont opposés).
On peut donc limiter son étude à l'intervalle $J = [0, \pi]$. Le reste de la courbe (qui correspond à l'intervalle $[-\pi, 0]$ sera obtenu par symétrie par rapport à l'origine du repère).

On pourra noter que la fonction sinus n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$ (par exemple $\sin(0) = \sin(2\pi) = 0$).

$x \mapsto \sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\sin)'(x) = \cos(x)$$

Or pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos(x) \geq 0$ et pour tout $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\cos(x) \leq 0$.

- **Tableau des variations de la fonction** sin **et courbe représentative sur** I. Voir tableau.

- **Tableau de valeurs (sinus des angles remarquables à apprendre)**. Voir tableau

- **Résoudre des équations en sinus** : on est parfois amené à résoudre des équations de la forme

$$\sin(a) = \sin(b)$$

La méthode de résolution est basée sur les deux remarques suivantes : d'une part la fonction est 2π-périodique et d'autre part x et $\pi - x$ ont le même sinus (voir le cercle trigonométrique au tableau).
On a alors la propriété suivante

Propriété 3

$$\sin a = \sin(b) \iff \begin{cases} a = b + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ a = \pi - b + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Complément important. Soit ω un réel, la fonction $x \mapsto \sin(\omega x)$ est une fonction sinusoïdale de pulsation ω (on peut toujours se ramener à $\omega > 0$). Elle est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Elle est périodique et sa période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\sin)'(\omega x) = \omega \cos(\omega x)$$

Exercice 2 Important Donnez une primitive sur $\mathbb{R}$ pour chacune des fonctions suivantes.

$$f(x) = \cos x,\ \ g(x) = \sin x,\ \ h(x) = \cos(3x),\ \ i(x) = \sin(2x)$$

$$\forall \omega \in \mathbb{R}^*, j(x) = \cos(\omega x),\ \ k(x) = \sin(\omega x)$$

2.3 Fonctions sinusoïdales

Définition 4 *On appelle fonction sinusoïdale de pulsation* ω *toute fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *qui s'écrit*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)\ (1)$$

où $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ *et* $\omega > 0$.

Ces fonctions jouent un rôle important en physique.

Par rapport à ce qui a été fait précédemment, on a facilement que toute fonction sinusoïdale de pulsation ω est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Elle est T-périodique avec $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. (A retenir)

On est souvent amené à transformer leur expression et à les mettre sous la forme suivante :

$$f(x) = A\cos(\omega x - \varphi) \ (2)$$

où $A > 0$, A s'appelle l'amplitude de la fonction f (son maximum) et φ la phase. La fonction f prend des valeurs comprises entre A et $-A$.

- Si $\varphi > 0$, on dit que f est en retard de phase sur la fonction $x \mapsto A\cos(\omega x)$.
- Si $\varphi < 0$, f est en avance de phase sur la fonction $x \mapsto A\cos(\omega x)$.

Comment passe t-on de l'écriture (1) à l'écriture (2) ?

Soit f, définie par $f(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$. On associe à la fonction f le nombre complexe $z = a + ib$ et on calcule $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. On pose $A = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Méthode : on part de l'expression (1) de f et on va factoriser par $A = \sqrt{a^2 + b^2}$. Voir tableau (Important).

Exercice 3

i) Transformer la fonction suivante sous la forme d'un seul cosinus *i.e.* sous la forme $A\cos(\omega x - \varphi)$.

$$f(x) = \sqrt{3}\cos x + \sin x$$

ii) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $(E) \quad f(x) = 1$

iii) Quelles sont les solutions de (E) dans $]-\pi, \pi]$.

3 La fonction tangente

A retenir Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, on pose

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

La fonction tangente a les propriétés suivantes :

- Elle est définie, continue et dérivable sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

- La fonction tangente est périodique de période π. En effet pour tout $x \in \mathcal{D}$,

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$$

- La fonction tangente est impaire : en effet pour tout $x \in \mathcal{D}$

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$$

- La fonction tangente est dérivable sur $\mathcal{D}$ et pour tout $x \in \mathcal{D}$,

$$(\tan)'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Voir tableau (calcul dérivée)

Comme elle est π-périodique, on peut restreindre son étude à tout intervalle de longueur π, on choisit généralement de l'étudier sur l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Elle est par ailleurs impaire, on peut se limiter à l'étudier sur $J = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Tableau de variations, calcul des limites (interprétation) et représentation graphique
Voir tableau.

4 Formules de trigonométrie

Vous devez connaître au minimum les 5 formules de trigonométrie suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$,

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$