

Dans ce chapitre on va étudier la notion d'espace vectoriel, en particulier on va essayer de comprendre ce qu'est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Ce genre d'étude constitue une partie de ce qu'on appelle l'algèbre en mathématiques et plus particulièrement l'algèbre linéaire que nous avons commencé à étudier avec les chapitres précédents concernant les matrices et les systèmes linéaires

1 Activité préparatoire

A partir des questions qui suivent on va essayer de comprendre ce qu'est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Cette notion concerne **la structure de certains ensembles** en mathématiques : des ensembles divers et variés qui ont une structure commune.

1. **Tout d'abord essayons de répondre à la question suivante** : qu'est-ce qu'un ensemble en mathématiques ? Comment on le note ? Que contient-il ? Donnez des exemples divers et variés (voir tableau).

2. **On s'intéresse maintenant à la notion de structure de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel sur des ensembles**. Soit E un ensemble **non vide** qui possède deux **lois** pour lesquelles l'ensemble est **stable** :

- i) la première loi (loi interne) est l'addition : lorsque vous prenez u et v deux éléments de l'ensemble E la somme de u et de v noté $u + v$ est encore un élément de E .

- ii) la deuxième loi (loi externe) est la multiplication par un réel : lorsque vous prenez $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors λu est encore un élément de E *i.e.* $\lambda u \in E$.

Essayez de réfléchir à des ensembles que vous connaissez en mathématiques et qui vérifient les points i) et ii).

On définit ci-dessous qu'un ensemble non vide E muni des deux lois ci-dessus (addition et multiplication par un réel), lois qui vérifient un certain nombre de propriétés (à préciser) est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

2 Espace vectoriel : généralités

Au travers de deux exemples d'ensembles constitués d'éléments différents, on va définir ce qu'on appelle la structure de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

On choisit $\mathcal{V} = \{\text{vecteurs du plan}\}$ et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Sur ces deux ensembles constitués "d'objets différents" (le premier contient des vecteurs, le second des nombres), on a des **lois communes ou opérations**.

- l'addition (loi de composition interne) En effet si $\vec{u} \in \mathcal{V}$ et $\vec{v} \in \mathcal{V}$ alors $\vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{V}$. De même si $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$ alors $z + z' \in \mathbb{C}$.

Dans ces deux ensembles on peut additionner les éléments, le résultat obtenu est un élément de l'ensemble.

- Multiplication par un réel (loi de composition externe) En effet si $\vec{u} \in \mathcal{V}$ et si $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\alpha\vec{u} \in \mathcal{V}$. De même si $z \in \mathbb{C}$ et si $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\alpha z \in \mathbb{C}$.

On peut multiplier les éléments de $\mathcal{V}$ (ou de $\mathbb{C}$), par un nombre réel, le résultat est bien un élément de $\mathcal{V}$ (ou de $\mathbb{C}$ respectivement).

Ces opérations vérifient un certain nombre de propriétés importantes :

- 1) Existence d'un élément neutre pour l'addition.

Dans chacun des deux ensembles choisis ci-dessus, il existe un élément neutre pour l'addition. Dans $\mathcal{V}$ c'est le vecteur nul $\vec{0} \in \mathcal{V}$ et qui vérifie pour tout $\vec{u} \in \mathcal{V}$, $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ et dans $\mathbb{C}$ le nombre 0 qui vérifie également pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z + 0 = 0 + z = z$.

- 2) Existence d'un élément symétrique (opposé) pour l'addition.

Pour tout $\vec{u} \in \mathcal{V}$, il existe $\vec{v} \in \mathcal{V}$ tel que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} = \vec{0}$. On note $\vec{v} = -\vec{u}$ l'opposé du vecteur $\vec{u}$. On a l'analogue dans $\mathbb{C}$.

- 3) L'addition est commutative.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$ on a $z + z' = z' + z$. On a la même chose dans $\mathcal{V}$ (l'addition des vecteurs est commutative)

- 4) L'addition est associative.

Soit $\vec{u} \in \mathcal{V}$, $\vec{v} \in \mathcal{V}$ et $\vec{w} \in \mathcal{V}$. alors $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.

On peut vérifier la même chose dans l'ensemble $\mathbb{C}$.

- 5) Les propriétés qui suivent sont satisfaites par la deuxième loi.

- Soit $\vec{u} \in \mathcal{V}$ et $\vec{v} \in \mathcal{V}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$. On a l'analogue dans $\mathbb{C}$.
- Soit $\vec{u} \in \mathcal{V}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ alors $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$. Idem dans $\mathbb{C}$.
- Soit $\vec{u} \in \mathcal{V}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ alors $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$. Idem dans $\mathbb{C}$.
- Soit $\vec{u} \in \mathcal{V}$ alors $1\vec{u} = \vec{u}$. Idem dans $\mathbb{C}$

On peut alors énoncer la définition qui suit.

Définition 1 Un ensemble E muni des deux lois "addition" et "multiplication par un réel" qui vérifient les propriétés 1), 2), 3), 4) et 5) ci-dessus est appelé un **$\mathbb{R}$ -espace vectoriel** (ou encore un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$).

Remarques importantes

- Un espace vectoriel d'après la propriété 1) n'est jamais vide puisqu'il contient au moins l'élément neutre pour l'addition, "le zéro".

- Lorsqu'on travaille dans un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, on appelle souvent les éléments de $\mathbb{R}$ les scalaires.

Exemples 1 Les ensembles ci-dessous sont tous des $\mathbb{R}$ espaces vectoriels.

- Les ensembles de nombres $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.
- L'ensemble des polynômes à coefficients réels $\mathbb{R}[X]$.
- L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- L'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.
- $\mathbb{R}^2$ (l'ensemble des couples de réels), $\mathbb{R}^3$ (ensemble des triplets de réels) ou de manière plus générale $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des n-uplets de réels.
- $\mathcal{V} = \{\text{vecteurs du plan}\}$ ou $\mathcal{E} = \{\text{vecteurs de l'espace}\}$.
- Pour tout $n \geq 2$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n ou encore plus généralement $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à p lignes et n colonnes.
- ...

Exercice Rapide Précisez pour chaque exemple ci-dessus l'élément neutre pour l'addition (traité à l'oral).

Dans un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ce qui est important c'est que l'on puisse additionner les éléments et les multiplier par un nombre réel. En mixant les deux, on fait ce qu'on appelle des combinaisons linéaires.

Définition 2 Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Soit $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ une famille d'éléments de E . On appelle **combinaison linéaire** des éléments u_i toute expression de la forme $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$ où $\lambda_i \in \mathbb{R}$ pour tout $1 \leq i \leq n$.
A noter que si $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$, $u \in E$.

Les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont appelés les **coefficients** de la combinaison linéaire.

Exemples 2

- Dans $E = \mathbb{C}$, on pose $z = 1 + 2i$ et $z' = 2 + 3i$ alors $2z - z' = 2(1 + 2i) - (2 + 3i)$ est une combinaison linéaire de z et z' .
- Dans $E = \mathcal{V}$, soit $\vec{u} \in \mathcal{V}$ et $\vec{v} \in \mathcal{V}$ alors $3\vec{u} + 2\vec{v}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- Dans $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ des éléments de E alors $2A + 5B - C = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire de A , B et C .

Dans la pratique il est délicat de démontrer qu'un ensemble E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Ce qu'on fait en général, c'est qu'on admet qu'on a des exemples de $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de base et on démontre que certains sous-ensembles de ces espaces vectoriels ont la même structure. On définit ainsi la notion de sous-espace vectoriel.

Définition 3 Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $F \subset E$ un sous-ensemble non vide de E . On suppose que F muni de l'addition et de la multiplication par un réel (obtenues par restriction des opérations de E) est muni d'une structure de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On dit alors que F est un sous-espace vectoriel de E .

A retenir On va donner ci-dessous un moyen pratique et simple pour démontrer qu'un sous-ensemble d'un espace vectoriel donné est un sous-espace vectoriel.

Propriété 1 Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $F \subset E$ une partie non vide de E . F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si les deux points suivants sont satisfaits :

- i) Pour tout $u \in F$ et $v \in F$ alors $u + v \in F$ (on dit que F est stable pour la somme)
- ii) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u \in F$ alors $\alpha u \in F$ (on dit que F est stable pour la multiplication par un réel)

Exercice 1 Soit $E = \mathbb{R}[X]$ (on sait que E est un $\mathbb{R}$ -espace-vectoriel) et $F = \mathbb{R}_2[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tels que } \deg(P) \leq 2\}$. Montrez que F est un sev de E .

Les éléments de F sont des polynômes à coefficients réels (dont le degré est inférieur ou égal à 2) donc $F \subset E$. De plus F est non vide par exemple $P = X^2 + 1 \in F$.

On vérifie le point i) : soit $P = aX^2 + bX + c \in F$ et $Q = a'X^2 + b'X + c' \in F$ (des éléments quelconques de F) alors $P + Q = aX^2 + bX + c + a'X^2 + b'X + c' = (a + a')X^2 + (b + b')X + (c + c') \in F$. En effet $P + Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg(P + Q) \leq 2$. Donc F est stable pour l'addition.

On vérifie le point ii) : soit $P = aX^2 + bX + c \in F$ (élément quelconque de F) et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\alpha P = \alpha(aX^2 + bX + c) = (\alpha a)X^2 + (\alpha b)X + (\alpha c) \in F$. En effet αP est bien un polynôme à coefficients réels dont le degré est inférieur ou égal à 2. F est stable pour la multiplication par un réel.

Conclusion $F = \mathbb{R}_2[X]$ est un sous-espace vectoriel de $E = \mathbb{R}[X]$.

Exercice 2 Soit $E = \mathbb{R}^2$ (on sait que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel) et $F = \{(x, 3x) ; x \in \mathbb{R}\}$. Montrez que F est un sous-espace vectoriel de E .

Les éléments de F sont des couples de réels donc on a bien $F \subset E$; de plus $F \neq \emptyset$ car par exemple $(0, 0) \in F$.

On vérifie le point i) : soit $u = (x, 3x) \in F$ et $v = (y, 3y) \in F$ (des éléments quelconques de F) alors $u + v = (x, 3x) + (y, 3y) = (x + y, 3(x + y))$ donc $u + v \in F$.

On vérifie le point ii) : soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u = (x, 3x) \in F$. $\alpha u = \alpha(x, 3x) = (\alpha x, 3(\alpha x)) \in F$.

Conclusion F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

3 Espace vectoriel : systèmes générateurs et systèmes libres finis

Définition 1 Systèmes générateurs finis

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Soit $\mathcal{F} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ une famille finie d'éléments non nuls de E . On dit que $\mathcal{F}$ est une **famille génératrice (finie) de E** (ou un **système générateur (fini) de E**) si tout élément de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{F}$ *i.e*

$$\forall u \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \text{ tels que } u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$$

Dans un espace vectoriel E une famille $\mathcal{F}$ d'éléments de E est génératrice lorsqu'elle permet de décrire tous les éléments de E par combinaison linéaire.

Exemples 1

- Plaçons nous dans $E = \mathbb{C}$: $\{1, i\}$ est un système générateur de $\mathbb{C}$. En effet pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $z = a \times 1 + b \times i = a + ib$.
- Plaçons nous dans $E = \mathbb{R}_2[X]$: $\{1, X, X^2\}$ est un système générateur de $\mathbb{R}_2[X]$. En effet pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, P s'écrit $P = a \times X^2 + b \times X + c \times 1 = aX^2 + bX + c$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
- Plaçons nous dans $E = \mathbb{R}^2$. Soit $u = (x, y)$ un élément quelconque de $E = \mathbb{R}^2$, u s'écrit

$$u = x(1, 0) + y(0, 1) \text{ où } x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$$

Donc tout élément u de E s'écrit comme une combinaison linéaire de deux éléments particuliers de E à savoir $(1, 0)$ et $(0, 1)$. Ces deux éléments sont bien des éléments de E .

Conclusion $\mathcal{F} = \{u_1 = (1, 0) ; u_2 = (0, 1)\}$ est une famille génératrice de $E = \mathbb{R}^2$.

- Posons $E = \{(x, 3x) ; x \in \mathbb{R}\}$ (E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel). Déterminez un système générateur de E .

Plaçons nous dans E . Soit $u = (x, 3x)$ un élément quelconque de E , u s'écrit

$$u = x(1, 3) \text{ où } x \in \mathbb{R}$$

Donc tout élément u de E s'écrit comme une combinaison linéaire d'un élément particulier de E à savoir $(1, 3)$. En effet $(1, 3) \in E$.

Conclusion $\mathcal{F} = \{u_1 = (1, 3)\}$ constitue une famille génératrice de E .

Définitions 2 Systèmes libres finis et systèmes liés

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Soit $\mathcal{F} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ une famille finie d'éléments non nuls de E . On dit que $\mathcal{F}$ est une **famille libre (finie) de E** (ou un **système libre (fini) de E**) si toute combinaison linéaire nulle *i.e.* de la forme

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_E$$

implique $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

En d'autres termes, la seule combinaison linéaire nulle de cette famille est celle dont tous les coefficients λ_i sont nuls.

Dans le cas contraire, si la famille $\mathcal{F}$ n'est pas libre, on dit que $\mathcal{F}$ est une **famille liée** ou encore que les éléments de $\mathcal{F}$ sont linéairement dépendants.

Remarque 1 Lorsqu'une famille $\mathcal{F}$ est liée (le contraire de libre), on peut trouver des réels non tous nuls tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_E$, supposons (par exemple) que $\lambda_1 \neq 0$ alors $u_1 = -\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} u_2 + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda_1} u_n\right)$ donc lorsqu'une famille est liée l'un au moins des éléments de la famille peut s'écrire à l'aide des autres (comme combinaison linéaire des autres). Ceci n'est pas possible lorsqu'une famille est libre.

Exercice 1 On se place dans $E = \mathbb{R}^3$. Considérons $u_1 = (1, 2, 1)$, $u_2 = (-1, 0, 3)$ et $u_3 = (2, -1, 4)$. Montrez que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est un système libre de $\mathbb{R}^3$.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. On peut alors écrire

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

On effectue : $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1 + 10\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

On effectue : $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ 12\lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Conclusion $\mathcal{F} = \{u_1, u_2, u_3\}$ est un système libre.

Proposez une autre méthode sans avoir à résoudre le système.

Exercice 2

1. On se place dans $E = \mathbb{R}^3$. Montrez que $u_1 = (1, -1, 5)$ et $u_2 = (-1, 2, 3)$ sont libres dans E .

Correction Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$. On peut alors écrire

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 5\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

On effectue : $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ 8\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Conclusion $\mathcal{F} = \{u_1, u_2\}$ est un système libre de $\mathbb{R}^3$.

2. On se place dans $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $\mathcal{F} = \{x \mapsto \cos x ; x \mapsto \sin x\}$ une famille de deux éléments de E . Montrez que $\mathcal{F}$ est une famille libre de E .

Correction

2. On pose $f_1(x) = \cos x$ et $f_2(x) = \sin x$. On veut montrer que $\mathcal{F} = \{f_1, f_2\}$ est une famille libre de E : soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0_E$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = 0$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) = 0$$

On choisit deux valeurs arbitraires de x : $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient alors

$$\begin{cases} \lambda_1 \cos(0) + \lambda_2 \sin(0) = 0 \\ \lambda_1 \cos(\frac{\pi}{2}) + \lambda_2 \sin(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Conclusion : $\mathcal{F}$ est une famille libre de E .

Remarques 2

- Dans un espace-vectoriel E , une famille constituée d'un seul élément non nul est toujours libre. En effet soit $u \in E$, $u \neq 0_E$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda u = 0_E$ alors $\lambda = 0$.
- Dans un espace-vectoriel E , une famille constituée de deux éléments non nuls est libre lorsque ces deux éléments ne sont pas proportionnels, cela revient à dire pour des vecteurs qu'ils ne sont pas colinéaires.

4 Bases en dimension finie

Définitions 1

- 1) On dit qu'un espace vectoriel est de dimension finie s'il existe une famille finie de générateurs de E .
- 2) On appelle **base** d'un espace vectoriel E toute famille libre et génératrice de E .

Propriété 1 Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{F} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ une base de E alors pour tout $u \in E$, u s'écrit de manière unique

$$u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n$$

où $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Les réels $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sont appelés les coordonnées de u dans la base $\mathcal{F}$.

Démonstration

- **Existence de l'écriture** : soit $u \in E$ un élément quelconque, comme $\mathcal{F}$ est une base de E c'est en particulier une famille génératrice de E donc u s'écrit comme une combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{F}$ i.e. il existe $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n$$

- **Unicité de l'écriture** : soit $u \in E$ (un élément quelconque) considérons deux écritures de u dans la base $\mathcal{F}$

$$u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_n u_n$$

où $\forall 1 \leq i \leq n, x_i \in \mathbb{R}$ et $\forall 1 \leq i \leq n, y_i \in \mathbb{R}$.

On alors

$$\iff x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n - (y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_n u_n) = 0_E$$

$$\iff (x_1 - y_1)u_1 + (x_2 - y_2)u_2 + \dots + (x_n - y_n)u_n = 0_E$$

Or $\mathcal{F} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ est une base de E donc une famille libre, on déduit alors

$$\iff \begin{cases} x_1 - y_1 = 0 \\ x_2 - y_2 = 0 \\ \vdots \\ x_n - y_n = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ \vdots \\ x_n = y_n \end{cases}$$

On a bien démontré que l'écriture est unique.

Exemples 1

- On se place dans $E = \mathbb{C}$. On a vu que $\{1, i\}$ est une famille génératrice et libre de $\mathbb{C}$.
C'est donc **une base** de $\mathbb{C}$ (d'où l'unicité de l'écriture algébrique d'un nombre complexe).
- On se place dans $E = \mathbb{R}^2$. Donnez une base de E (voir tableau)
- Plaçons nous dans $E = \{(x, y, x + 2y) ; (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. On admet que E est un espace-vectoriel (on peut facilement démontrer que E est un sous-espace-vectoriel de $\mathbb{R}^3$). Déterminons une base de E . Voir tableau.
- Posons $F = \{(x, 3x) ; x \in \mathbb{R}\}$. Montrer que F est un sous espace-vectoriel de $E = \mathbb{R}^2$ et donner une base de F .

On admet le théorème suivant.

Théorème 1 Dans un espace vectoriel E de dimension finie, toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments.

Exercice 1 (rapide) Donnez une base de $\mathbb{R}^3$ (et plus généralement de $\mathbb{R}^n$ pour tout $n \geq 1$).

Pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, u s'écrit :

$$u = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) \text{ où } x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}$$

On pose $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (0, 1, 0)$ et $u_3 = (0, 0, 1)$; ces trois éléments sont dans $\mathbb{R}^3$ et on vient de montrer que tout élément de $\mathbb{R}^3$ s'écrit comme une combinaison linéaire de u_1 , u_2 et u_3 . Donc $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Montrons que cette famille est libre : soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned} \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ et donc une base de $\mathbb{R}^3$.

On généralise facilement à $\mathbb{R}^n$ pour tout $n \geq 1$. A noter que $\{1\}$ constitue une base du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}$.

On a alors la définition suivante :

Définition 2 Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On appelle la dimension de E le nombre d'éléments de l'une de ses bases. On la note $\dim_{\mathbb{R}} E$.

Exemples 2 On revient aux exemples étudiés ci-dessus.

- $E = \mathbb{C}$. On a vu que $\{1, i\}$ est une base de $\mathbb{C}$ donc $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.
- $E = \mathbb{R}^2$. On a vu que $\mathcal{F} = \{u_1 = (1, 0) ; u_2 = (0, 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ donc $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$.

On comprend pourquoi on représente les nombres complexes dans la plan.

- $E = \{(x, y, x + 2y) ; (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. On a vu que $\{v = (1, 0, 1), w = (0, 1, 2)\}$ est une base de E donc $\dim_{\mathbb{R}} E = 2$.
- $E = \{(x, 3x) ; x \in \mathbb{R}\}$. On a vu que $\mathcal{F} = \{u_1 = (1, 3)\}$ est une base de E donc $\dim_{\mathbb{R}} E = 1$.

Exercice 2 (rapide) Dédurre la dimension de $\mathbb{R}^3$. On a démontré précédemment que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ donc $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$.

On peut généraliser et déduire que pour tout $n \geq 1$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$.

Exercice 3

Soit $\mathcal{D}$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

On considère l'équation différentielle $y'(x) = 3y(x)$ et soit F l'ensemble de ses solutions. Montrez que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}$. Donnez une base de F et en déduire sa dimension (on justifiera soigneusement). Voir tableau

On admet le théorème suivant :

Théorème 2 Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie n .

- Si F est un sous-espace vectoriel de E alors $\dim_{\mathbb{R}} F \leq n$.
- Si $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est un système libre de E contenant n éléments alors c'est une base de E .
- Si $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est un système générateur de E contenant n éléments alors c'est une base de E .

Remarques (Importance de ce théorème)

Si l'on travaille dans un espace vectoriel de dimension n :

- une famille de n éléments libres est une base (inutile de montrer que la famille est génératrice),
- de même une famille de n éléments générateurs est une base (inutile de montrer que la famille est libre),

Exercice 4 (rapide) Selon vous, quel est le seul sous-espace vectoriel de dimension 0 ?

Complément (à retenir) : soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de E . Soit $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ des éléments de E donc on connaît les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$: par exemple

$$v_1 = a_{1,1}e_1 + a_{2,1}e_2 + \dots + a_{n,1}e_n = \sum_{i=1}^n a_{i,1}e_i$$

où pour tout $1 \leq i \leq n$, $a_{i,1} \in \mathbb{R}$ sont les coordonnées de v_1 dans la bases $\mathcal{B}$.
 Pour tout $1 \leq j \leq n$,

$$v_j = a_{1,j}e_1 + a_{2,j}e_2 + \cdots + a_{n,j}e_n = \sum_{i=1}^n a_{i,j}e_i$$

où pour tout $1 \leq i \leq n$, $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ sont les coordonnées de v_j dans la bases $\mathcal{B}$.

Comment montrer que ces n éléments forment une famille libre ?

Méthode 1 : on part de la définition de famille libre. On considère $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_E$$

On veut montrer que cela implique que $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

En remplaçant les v_i par leurs coordonnées, on est amené à résoudre un système de n équations et n inconnues :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff (S) \begin{cases} a_{1,1}\lambda_1 + a_{1,2}\lambda_2 + \cdots + a_{1,n}\lambda_n = 0 \\ a_{2,1}\lambda_1 + a_{2,2}\lambda_2 + \cdots + a_{2,n}\lambda_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n,1}\lambda_1 + a_{n,2}\lambda_2 + \cdots + a_{n,n}\lambda_n = 0 \end{cases}$$

On résout le système par le pivot de Gauss...

Ou alors on utilise ses connaissances d'algèbre linéaire du chapitre précédent.

Méthode 2 On voit que $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ est une solution du système ci-dessus. On veut montrer que c'est la seule. Autrement dit on veut montrer que le système ci-dessus qui est un système à n équations et n inconnues admet une solution unique à savoir le n -uplet $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. En d'autres termes on veut montrer que le système ci-dessus est un système de Cramer.

On note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice associée au système (A est la matrice dont chaque colonne C_j est formé par les coordonnées de v_j dans la base $\mathcal{B}$).

(S) est un système de Cramer si et seulement $\det A \neq 0$. On déduit alors le résultat suivant :

Propriété 2 Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de E . Soit $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ des éléments de E donc on connaît les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Pour tout $1 \leq j \leq n$,

$$v_j = a_{1,j}e_1 + a_{2,j}e_2 + \cdots + a_{n,j}e_n = \sum_{i=1}^n a_{i,j}e_i$$

où pour tout $1 \leq i \leq n$, $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ sont les coordonnées de v_j dans la bases $\mathcal{B}$.

On note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice dont chaque colonne C_j est formé par les coordonnées de v_j dans la base $\mathcal{B}$.

$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est une famille libre de E si et seulement si $\det A \neq 0$.

Exemple 3 Montrer que les trois éléments ci-dessous forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$ puis en déduire qu'ils forment une base.

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Voir tableau.