Chapitre 16

Introduction au calcul matriciel suite : résolution des systèmes linéaires.

1 Des exemples pour commencer

$$(S_1) \begin{cases} x + 3y - 4z = 0 \\ -2x + 5y + 3z = 2 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

est un **système linéaire de 3 équations et 3 inconnues**. On définit A la matrice associée au système

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -2 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la matrice colonne X formée par les inconnues et B la matrice formée par le second membre

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vérifions que le système s'écrit matriciellement $AX = B$ (voir tableau).

Une solution de ce système sera un triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ qui vérifiera les 3 équations. Pour résoudre ce système, on doit se placer dans $\mathbb{R}^3$.

$$(S_2) \begin{cases} x + y - z = -1 \\ -2x + y + z = 2 \end{cases} \quad (S_3) \begin{cases} x + y = -1 \\ -2x + 2y = 0 \\ 3x + 5y = 1 \end{cases}$$

(S_2) est un **système linéaire de 2 équations et 3 inconnues**. La matrice associée au système est

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$A_2 \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. Une solution de ce système sera un triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ qui vérifiera les 2 équations. Là encore, on résout le système dans $\mathbb{R}^3$.

(S_3) est un **système linéaire de 3 équations et 2 inconnues**. La matrice associée au système est

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$A_3 \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$. Une solution de ce système sera un couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ qui vérifiera les 3 équations. Ici, on résout le système dans $\mathbb{R}^2$.

2 Définitions et liens avec les matrices

Définitions 1

- a) On appelle équation linéaire à n inconnues une équation de la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

où $a_i \in \mathbb{R}$ sont les coefficients de l'équation (ce sont des nombres réels), $b \in \mathbb{R}$ le second membre et les x_i pour $1 \leq i \leq n$ sont les inconnues.

- b) Un système linéaire est la donnée de plusieurs équations linéaires du type

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \cdots + a_{p,n}x_n = b_p \end{cases}$$

Un tel système est un système linéaire à p équations et n inconnues. Les coefficients $(a_{i,j})$ $1 \leq i \leq p$ placées devant les inconnues x_i sont appelés les $1 \leq j \leq n$ coefficients du système.

- c) Une solution du système linéaire ci-dessus est un n -uplet $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ qui vérifient les p équations.
- d) On appelle matrice associée au système linéaire $(\mathcal{S})$ la matrice A formée par les coefficients, $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix}$$

Définitions 2

- a) Résoudre le système $(\mathcal{S})$ c'est trouver l'ensemble de ses solutions : l'ensemble peut être **vide i.e le système n'admet pas de solution** ; le système peut admettre **une unique solution**, on note alors $\{(x_1, x_2, \cdots, x_n)\}$ son ensemble de solution contenant un unique n -uplet. Enfin le système peut admettre **une infinité de solutions i.e une infinité de n -uplets**.
- b) Deux systèmes sont **équivalents** s'ils admettent le même ensemble de solutions.

Écriture matricielle d'un système linéaire

On considère le système linéaire à p équations et n inconnues

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \cdots + a_{p,n}x_n = b_p \end{cases}$$

On note A la matrice associée au système, $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix}$, on note

X la matrice colonne formée par les inconnues $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et enfin B la matrice

colonne formée par les coefficients du second membre $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$.

Le système $(\mathcal{S})$ s'écrit matriciellement :

$$AX = B$$

En effet, effectuons le produit AX :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \cdots + a_{p,n}x_n \end{pmatrix}$$

Le système se traduit bien par l'égalité matricielle $AX = B$.

Résoudre le système $(\mathcal{S})$ sous forme matricielle revient à déterminer toutes les matrices colonnes X telles que $AX = B$.

Remarque Lorsque la matrice colonne du second membre est nulle $B = 0_{p,1}$ (tous les coefficients du second membre sont nuls) le système est dit **homogène**.

Exemples 2

$$(S_1) \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2x + y + 3z = 1 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

est un système linéaire de 3 équations et 3 inconnues. La matrice associée au système est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note X la matrice formée par les inconnues, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ la matrice colonne formée par les coefficients du second membre. Le système $(\mathcal{S}_1)$ s'écrit : $AX = B$.

Inversement soit le système linéaire écrit sous forme matricielle $AX = B$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Ecrire le système linéaire correspondant : on commence par effectuer le produit AX

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dots\dots$$

Par conséquent $AX = B$ correspond au système linéaire :

3 Méthode de résolution : le pivot de Gauss

Soit le système linéaire de p équations et n inconnues écrit sous forme matricielle $AX = B$ où $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ est la matrice associée au système ou encore

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \dots + a_{p,n}x_n = b_p \end{cases}$$

On peut vérifier que chacune des opérations définies ci-dessous appelées "opérations élémentaires" que l'on fait subir à un système linéaire n'affecte pas son ensemble de solutions. **Lorsqu'on effectue de telles opérations, le système linéaire obtenu est équivalent au système initial, il a donc le même ensemble de solutions.**

Remarque 1 Chaque opération élémentaire du type 1), 2) ou 3) (que l'on va détailler ci-dessous) se traduit matriciellement par la multiplication à gauche par une matrice inversible. C'est pour cela que ce type d'opération n'affecte pas l'ensemble des solutions.

Opérations élémentaires

On appelle **opération élémentaire** toute opération du type 1), 2) ou 3) suivante :

- 1) échange de lignes ($L_i \longleftrightarrow L_j$),

- 2) multiplication d'une ligne par un réel λ non nul ($L_i \leftarrow \lambda L_i$),
- 3) on peut remplacer une ligne L_i par $L_i + \lambda L_j$, ($j \neq i$).

Technique du pivot : les étapes

Etape 1 : on choisit un pivot (=une équation à laquelle on ne touche pas), par exemple L_1 (quitte à faire un échange de lignes en utilisant l'opération 1), à l'aide du pivot, en utilisant des opérations du type 3, on fait partir la **même inconnue**, par exemple x_1 dans les équations restantes $L_2, L_3, \dots, L_p$.

Remarque Il se peut que lors de cette première étape d'autres inconnues que x_1 soient éliminées, ce n'est pas un problème, cela arrive !

Etape 2 : on choisit un deuxième pivot, par exemple L_2 (à laquelle on ne touche pas) et à l'aide de ce nouveau pivot, en utilisant des opérations du type 3, on fait partir la **même inconnue**, par exemple x_2 dans les équations restantes $L_3, L_4, \dots, L_p$.

On reitère le procédé étape après étape. Un système ayant p équations aura au maximum $p - 1$ étapes de ce type. Une fois les étapes accomplies, on discute de l'ensemble des solutions.

Technique du pivot : la conclusion

Une fois toutes les étapes terminées, on réfléchit à l'ensemble des solutions. Plusieurs cas peuvent se produire :

- on aboutit à une contradiction (incompatibilité dans l'une des équations), on conclut alors que le système n'admet pas de solution (l'ensemble des solutions est l'ensemble vide). On note $\mathcal{S} = \emptyset$.
- dans la dernière équation, on trouve la valeur de x_n , on remplace alors dans l'équation précédente et on trouve la valeur de x_{n-1} . Ainsi de suite en remontant on trouve les valeurs de chaque inconnue $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$. Le système admet alors une unique solution le n -uplet : $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. On conclut que l'ensemble des solutions est l'ensemble $\mathcal{S} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$.
- l'ensemble des solutions est infini.

On peut avoir un premier cas : on prend la dernière équation et il reste par exemple deux inconnues, x_n et x_{n-1} . On fixe alors l'une des inconnues par exemple x_n qui joue le rôle de paramètre et on exprime x_{n-1} et les autres inconnues en fonction du paramètre x_n . On a une **indétermination d'ordre 1**, *i.e.* l'ensemble des solutions dépend d'un paramètre. D'où l'infinité de solutions.

Autre cas possible : on prend la dernière équation et il reste par exemple trois inconnues, x_n, x_{n-1} et x_{n-2} . On fixe alors 2 des 3 inconnues par exemple x_n et x_{n-1} qui jouent le rôle de paramètres et on exprime x_{n-2} et les autres inconnues en fonction des 2 paramètres choisis. On a une **indétermination d'ordre 2**, *i.e.* l'ensemble des solutions dépend de deux paramètres. D'où l'infinité de solutions.

Pour des systèmes contenant un nombre d'inconnues assez grand on peut avoir des indéterminations d'ordre 3 (l'ensemble des solutions dépendra de 3 paramètres) etc...

Exemples 3

1. Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 4y - 2z = 0 \\ -x - 2y - z = -1 \end{cases}$$

On choisit L_1 comme pivot et on effectue les opérations suivantes, l'objectif dans cette première étape est d'éliminer la première inconnue x : $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$. On obtient alors le système suivant :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 0 = -2 \\ -2z = 0 \end{cases}$$

Les étapes du pivot sont terminées, on voit ici qu'on aboutit à une incompatibilité donc l'ensemble des solutions $\mathcal{S} = \emptyset$.

2. Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ x + y - 2z = -1 \end{cases}$$

On commence par échanger L_1 et L_2 , on obtient alors :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x + 2y - z = 1 \\ x + y - 2z = -1 \end{cases}$$

On choisit maintenant L_1 comme pivot et on effectue les opérations suivantes pour "enlever" x dans les équations L_2 et L_3 : $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$. On obtient alors le système :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 5y - 4z = 1 \\ 2y - 3z = -1 \end{cases}$$

On effectue les opérations $L_2 \leftarrow 2L_2$ et $L_3 \leftarrow 5L_3$, on obtient :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 10y - 8z = 2 \\ 10y - 15z = -5 \end{cases}$$

On choisit L_2 comme pivot et on termine les étapes en effectuant : $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 10y - 8z = 2 \\ -7z = -7 \end{cases}$$

Les étapes du pivot sont terminées, on conclut :

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

D'où : $\mathcal{S} = \{(0, 1, 1)\}$.

3. Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$$

On choisit L_1 comme pivot et on effectue l'opération suivante : $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$.

On obtient alors le système :

$$\iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -y + 3z = 1 \end{cases}$$

Les étapes du pivot sont terminées, on réfléchit pour la conclusion : ici, dans la dernière équation, il reste encore deux inconnues.

On choisit l'une d'elle, par exemple, z qui va devenir un paramètre (z varie dans $\mathbb{R}$), on va exprimer y en fonction de z puis en remontant on pourra exprimer x en fonction de z . On est dans le cas d'une **indétermination d'ordre 1**, i.e. tout dépend d'un seul paramètre. Il y a bien évidemment une infinité de solutions.

$$\iff \begin{cases} x = 1 - 2z \\ y = -1 + 3z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On notera l'ensemble des solutions $\mathcal{S} = \{(1 - 2z, -1 + 3z, z) ; z \in \mathbb{R}\}$. On reconnaît la représentation paramétrique d'une droite dans l'espace (dans $\mathbb{R}^3$).

Exercice 1 Résoudre les systèmes linéaires suivants par la méthode du pivot de Gauss.

$$(\mathcal{S}_1) \begin{cases} x + 2y - 3z - t = 0 \\ -x + y + 4z + 2t = 1 \\ x + 2y + 4z + 2t = -1 \\ -3x - y + 2z + t = 2 \end{cases}$$

$$(\mathcal{S}_2) \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 0 \\ -2x + 2y - 2z = 0 \\ 4x - 4y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$(\mathcal{S}_3) \begin{cases} 2x - 4y + 2z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

Exercice 2 Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$(\mathcal{S}_1) \begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ x + y - 2z = -1 \end{cases} \quad (\mathcal{S}_2) \begin{cases} -x - 2y - z = 0 \\ -3x - 2y + z = 0 \\ 6x + 6y = 0 \end{cases}$$

$$(\mathcal{S}_3) \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \\ 3x + 6y + z = 0 \end{cases} \quad (\mathcal{S}_4) \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + y - z = -1 \end{cases}$$

4 Systèmes de Cramer

Dans des cas très particuliers, on dispose d'une autre méthode. Le problème c'est que cette méthode ne s'applique pas toujours et qu'avant de l'appliquer, il faut d'abord expliquer pourquoi on peut l'appliquer. Cette méthode a été utilisée en cours d'électricité en début d'année car les systèmes linéaires que vous rencontrez sont toujours des systèmes dits de Cramer.

Définition 1 un système linéaire à p équations et n inconnues est un système de Cramer lorsque $p = n$ et la matrice associée au système est inversible.

Important. Si on note A la matrice associée à un système de Cramer, A est une matrice carrée de taille n , $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\det(A) \neq 0$.

Théorème 1 Soit $AX = B$ un système de Cramer écrit sous forme matricielle.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice associée au système, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne

formée par les inconnues et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne du second membre.

Alors ce système admet une solution unique.

Preuve : en effet, le système est de Cramer donc A est une matrice inversible, on note A^{-1} son inverse. On part de l'égalité $AX = B$, on multiplie à gauche de chaque côté de l'égalité par A^{-1} , on obtient $A^{-1}(AX) = A^{-1}B \iff (A^{-1}A)X = A^{-1}B \iff I_n X = A^{-1}B$. D'où $X = A^{-1}B$, on a montré que X est unique.

A partir de cette démonstration, on peut déduire les formules de Cramer suivantes :

Théorème 2 Soit $AX = B$ un système de Cramer écrit sous forme matricielle.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice associée au système, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne

formée par les inconnues et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne du second membre.

Pour tout $1 \leq k \leq n$, $x_k = \frac{1}{\det A} \det(C_1, C_2, \dots, C_{k-1}, B, C_{k+1}, \dots, C_n)$ où $C_1, C_2, \dots, C_n$ désignent les colonnes de A .

Remarque importante : si on veut la valeur de x_k on remplace la colonne C_k de A par B et on calcule le déterminant ainsi formé que l'on divise par $\det(A)$.

Théorème 3 Si $AX = B$ est un système linéaire à n équations et n inconnues (*i.e.* la matrice associée au système $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) **admet une solution unique alors ce système est de Cramer *i.e* la matrice A est inversible.**

En quoi ce théorème est important ? Imaginons que vous ayez un système linéaire à n équations et n inconnues *i.e.* la matrice associée au système appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si vous résolvez ce système et qu'il admet une solution unique alors d'après le théorème 3 vous pouvez déduire que la matrice A est inversible sans avoir calculé son déterminant.

Exemple 1 : résoudre le système linéaire suivant en utilisant la méthode de Cramer.

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ x + y - 2z = -1 \end{cases}$$

On commence évidemment par démontrer que le système est de Cramer. On note A la matrice associée au système.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

est une matrice carrée, $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On calcule $\det(A)$:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

En effectuant : $L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$. On obtient

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 10 = 7$$

$\det(A)$ est non nul, la matrice A associée au système est inversible, on a bien un système de Cramer.

On utilise maintenant les formules de Cramer pour déterminer l'unique solution du système. Comme il s'agit de déterminer la première inconnue, x , on a remplacé la première colonne de A par le second membre B .

$$x = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{7} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

On a effectué $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ pour faciliter le calcul du déterminant.

Il s'agit maintenant de déterminer la deuxième inconnue, y , on a remplacé la deuxième colonne de A par le second membre B .

$$y = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{7} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{7} \times (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = \frac{-1}{7}(-3-4) = 1.$$

On a effectué $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ pour faciliter le calcul du déterminant.

Il s'agit enfin de déterminer la dernière inconnue, z , on a remplacé la troisième colonne de A par le second membre B .

$$z = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{7} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{7} \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{7}(3+4) = 1.$$

On a effectué $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ pour faciliter le calcul du déterminant.

L'unique solution du système est : $(0, 1, 1)$.

À l'inverse du pivot de Gauss, la méthode de Cramer a des contraintes : elle ne s'applique qu'à des systèmes linéaires dont le nombre d'équations est égal au nombre d'inconnues et la matrice associée au système doit être inversible.

Je vous propose pour compléter ce travail d'aller écouter une petite vidéo. Je n'adhère pas forcément à l'ensemble des explications surtout les exemples du début où on applique la méthode de Cramer sans vérifier au préalable qu'on peut l'appliquer ce qui mathématiquement pose problème mais ceci étant dit, cela peut vous aider....

<https://www.youtube.com/watch?v=CNzVk1evqac>

Exercice 3

On considère la matrice $\mathcal{A}$ et le système linéaire $(\mathcal{S})$ définis ci-dessous.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (\mathcal{S}) = \begin{cases} 4x + y - 5z = 1 \\ x + 3y + z = 2 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

Répondre par vrai ou faux. Chaque réponse devra être justifiée.

A) La matrice $\mathcal{A}$ est inversible.

B) Le déterminant de la matrice $\mathcal{A}$ vaut $\frac{1}{29}$.

C) L'inverse de la matrice $\mathcal{A}$ est la matrice $\mathcal{B} = \frac{1}{29} \begin{pmatrix} 5 & -7 & 16 \\ -1 & 13 & -9 \\ -2 & -3 & 11 \end{pmatrix}$

D) L'ensemble des solutions du système $(\mathcal{S})$ est un plan.

E) Le système $(\mathcal{S})$ admet une solution unique.