Chapitre 15

Introduction au calcul matriciel.

Dans ce chapitre tous les coefficients considérés seront des nombres réels mais tout ce qui suit reste vrai avec des coefficients complexes.

1 Définitions et propriétés fondamentales

1.1 Vocabulaire des matrices

Définition 1 Une matrice à p lignes et n colonnes est un tableau constitué de p lignes et de n colonnes dont les coefficients (on dit aussi les entrées) sont des nombres réels. On note $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à p lignes et n colonnes à coefficients réels.

Un élément A de l'ensemble $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ se note : $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$, $a_{i,j}$ désigne le coefficient situé sur la i-ème ligne et j-ème colonne. On dit aussi "coefficient à la place (i, j)".

On note aussi

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix}$$

Définitions 2

- Une matrice dont le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes (*i.e.* $p = n$) est appelée une matrice carrée. On notera $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes (au lieu de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$).

- Une matrice à une ligne est appelé *matrice ligne*. $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices lignes à n colonnes.

- Une matrice à une colonne est appelé *matrice colonne*. $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices colonnes à p lignes.

- On appelle matrice nulle de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ la matrice à p lignes et n colonnes dont tous les coefficients sont nuls. On la note $0_{p,n}$. Si $p = n$ on la note 0_n au lieu de $0_{n,n}$.

- On appelle matrice transposée de la matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ la matrice notée ${}^tA$ appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par ${}^tA = (a_{j,i})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq p}}$.

  Pour passer de A à sa transposée, on échange les lignes et les colonnes.

- Notons que deux matrices A et B sont égales lorsqu'elles sont de même taille (*i.e.* même nombre de lignes et de colonnes) et lorsque les coefficients à la même place sont égaux.

Exemples 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$A \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$. On détermine sa transposée (en échangeant lignes et colonnes)

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

${}^tA \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

est une matrice carrée, $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice ligne, $C \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ et

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice colonne, $D \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On remarque que ${}^tC = D$.

Remarques : ${}^t({}^tA) = A$.
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors ${}^tA$ est aussi une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que A est une *matrice symétrique*, si ${}^tA = A$

1.2 Opérations sur les matrices

Définitions 1 On considère deux matrices de même taille $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) La matrice somme de A et B est la matrice notée $A + B$ définie par

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Pour obtenir le coefficient de $A+B$ placé sur la i-ème ligne et j-ème colonne on additionne tout simplement $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$.

ii) Le produit de la matrice A par le réel λ est la matrice notée λA et définie par

$$\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Pour obtenir la matrice λA, on multiplie chaque coefficient de A par λ.

L'addition des matrices possède les mêmes propriétés que l'addition des nombres réels (commutative, associative etc...).

Exercice 1 Soit $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ définies par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculer les matrices $A+B$ et $3A$.

Correction

$$A+B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

et

$$3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Pour définir le produit de deux matrices (opération un peu plus délicate et pas toujours définie), on va devoir généraliser la notion de produit scalaire à des matrices colonnes.

Définition 2 On considère deux *matrices colonnes* de même taille $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Les matrices X et Y sont des éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Le produit scalaire de X par Y est le nombre réel noté $X.Y$ et définie par

$$X.Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

Par convention, on définit aussi la produit scalaire d'une matrice ligne $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ par une matrice colonne $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la façon suivante :

$$L.C = {}^tL.C = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\iff L.C = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

A partir de cette généralisation du produit scalaire on va définir le produit de deux matrices.

Définition 3 Produit Matriciel.

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. La matrice produit de A par B notée AB est une matrice de $M_{p,m}(\mathbb{R})$ dont le coefficient situé à la place (i,j) (sur la i-ème ligne et j-ème colonne) est le produit scalaire de la i-ème ligne de A par la j-ème colonne de B. Si on note $c_{i,j}$ ce coefficient

$$c_{i,j} = L_i.C_j = \begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \cdots + a_{i,n}b_{n,j}$$

pour tout $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq m$.

Commentaires Lorsqu'on multiplie la matrice A par la matrice B

- il faut que le nombre de colonnes de la matrice A soit égal au nombre de lignes de la matrice B,
- la matrice produit AB aura le même nombre de lignes que la matrice A et le même nombre de colonnes que la matrice B,
- chaque coefficient de la matrice produit AB est obtenu en effectuant un produit scalaire des lignes de A par les colonnes de B. Par exemple pour obtenir le premier coefficient du produit AB placé sur la ligne 1 et la colonne 1, on fait le produit scalaire de la première ligne de A par la première colonne de B *i.e.*

$$c_{1,1} = L_1.C_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ \vdots \\ b_{n,1} \end{pmatrix} = a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} + \cdots + a_{1,n}b_{n,1}$$

Remarque importante : attention, suivant la taille des matrices, si le produit AB existe, le produit BA peut ne pas exister.

Exercice 2 Calculer les produits AB suivants en précisant à chaque fois la taille de la matrice produit.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Correction Voir tableau

Exercice 3 Vrai ou faux ?

- On peut multiplier une matrice $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ par une matrice $B \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$.
- On peut multiplier une matrice $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ par une matrice $B \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$.
- Lorsqu'on multiplie une matrice $A \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$ par une matrice $B \in \mathcal{M}_{3,5}(\mathbb{R})$, on obtient $AB \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- Lorsqu'on multiplie une matrice $A \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$ par une matrice $B \in \mathcal{M}_{3,5}(\mathbb{R})$, on obtient $AB \in \mathcal{M}_{4,5}(\mathbb{R})$.

Exercice 4 *Pour s'entraîner*

Effectuez le produit AB suivant si c'est possible, dans le cas où ce n'est pas possible expliquez pourquoi.

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2 Cas particulier des matrices carrées

2.1 Un peu de vocabulaire

On rappelle qu'une matrice carrée est une matrice dont le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de "taille n".

Dans une matrice carrée, les coefficients $a_{1,1}$, $a_{2,2}$, $\cdots$ sont appelés les éléments diagonaux.

Définitions 1

- Une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonale si $a_{i,j} = 0$ pour tout $i \neq j$.
- Une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure si $a_{i,j} = 0$ pour tout $i > j$.
- Une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est triangulaire inférieure si $a_{i,j} = 0$ pour tout $i < j$.
- On appelle matrice identité de taille n, la matrice notée I_n et définie par $I_n = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ où $a_{i,i} = 1$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et $a_{i,j} = 0$ pour tout $i \neq j$. La matrice idéntité est une matrice diagonale.

Exemples 1

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad T_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

D est une matrice diagonale, T_1 est une matrice triangulaire supérieure et T_2 est une matrice triangulaire inférieure.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I_3 est la matrice identité dans $M_3(\mathbb{R})$ et I_4 est la matrice identité dans $M_4(\mathbb{R})$.

Remarques importantes

- La matrice identité vérifie que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $AI_n = I_nA = A$: la matrice I_n est l'élément unité pour le produit dans l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Si A est une matrice triangulaire supérieure alors ${}^tA$ est une matrice triangulaire inférieure et inversement.
- Si A est une matrice diagonale alors ${}^tA = A$.
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors les produits AB et BA existent toujours, par contre la plupart du temps, ils ne sont pas égaux. Le produit matriciel dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas commutatif.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors le produit matriciel vérifie les propriétés suivantes dans l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

  $$A(BC) = (AB)C\,;\; (\lambda A)B = \lambda(AB)\,;\; A(B+C) = AB+AC\,;\; (A+B)C = AC+BC$$
  $${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$$

Exercice 1 Calculez AB et BA avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.1.1 Déterminant d'une matrice carrée

On va donner une définition **récursive** du déterminant. On commence par définir une convention importante.

Si $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on notera dans ce paragraphe, $A_{i,j}$ la matrice A privée de sa ligne i et de sa colonne j. Donc $A_{i,j}$ est une matrice de taille $n-1$. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ alors $A_{1,2} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ et $A_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Définition 1

i) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on appelle <u>déterminant</u> de la matrice A le nombre réel noté $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

ii) Si $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle <u>déterminant</u> de la matrice A, le nombre réel noté $\det A = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1,j} \det A_{1,j}$. On dit qu'on a développé le déterminant de A par rapport à la 1-ère ligne.

On observe le caractère récursif de la définition car on sait calculer le déterminant d'une matrice de taille 2, pour une matrice de taille n, on se ramème au calcul d'un déterminant de taille $n-1$ etc...

Exemple 1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. On va calculer le déterminant de A en développant le déterminant par rapport à la première ligne. Si on utilise la définition ci-dessus :

$$\det A = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} a_{1,j} \det A_{1,j} = (-1)^{1+1} a_{1,1} \det A_{1,1} + (-1)^{1+2} a_{1,2} \det A_{1,2} + (-1)^{1+3} a_{1,3} \det A_{1,3}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - (-1) \times \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det A = (10-4) + [15 - (-1)\times 4] + 2[3 - (-1)\times 2] = 6 + 19 + 10 = 35$$

Les facteurs $(-1)^{1+j}$ devant chaque coefficient de la ligne 1, correspondent aux signes des colonnes et des lignes : chaque colonne et chaque ligne sont précédées d'un signe $+$ ou $-$ avec la convention suivante : la première colonne est précédée du signe $+$ puis on alterne et on fait la même chose pour les lignes.

On peut choisir de développer le déterminant de la matrice A par rapport à n'importe quelle ligne ou n'importe quelle colonne, on obtiendra la même valeur. On admet la propriété suivante :

Propriété 1 Soit $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Pour tout $1 \le i \le n$,

$$\det\, A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det\, A_{i,j}$$

On dit qu'on a développé le déterminant de A par rapport à la i-ème ligne.

b) Pour tout $1 \le j \le n$,

$$\det\, A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det\, A_{i,j}$$

On dit qu'on a développé le déterminant de A par rapport à la j-ème colonne.

Remarques importantes

- Grâce à la définition et aux propriétés on montre facilement que

$$\det {}^t A = \det\, A.$$

- On peut montrer par récurrence que le déterminant d'une matrice triangulaire (et donc en particulier d'une matrice diagonale) est égal au produit des éléments diagonaux.

Exemple 2 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.
Alors

$$\det\, A = -1 \times 2 \times 7 = -14$$

D'après la propriété 1, on a le choix de développer le calcul d'un déterminant par rapport à n'importe quelle ligne ou n'importe quelle colonne. On voit l'intérêt de choisir une ligne ou une colonne comportant des zéros. On va mettre en évidence des opérations élémentaires qui vont permettre de faciliter le calcul d'un déterminant, certaines opérations permettront de faire apparaître des zéros sur une ligne ou une colonne sans modifier la valeur du déterminant.

Attention les propriétés qui suivent sont valables pour un déterminant pas pour une matrice.

Propriété 2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Le déterminant de A change de signe si on permute deux lignes de A (ou deux colonnes de A).

b) Si on multiplie une ligne de A (respectivement une colonne de A) par un réel λ alors le déterminant de A est multiplié par λ.

c) On ne change pas la valeur du déterminant de A en remplaçant la ligne L_i par $L_i + \lambda L_k$, où $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $i \neq k$. De même, on ne change pas la valeur du déterminant de A en remplaçant la colonne C_j par $C_j + \lambda C_k$, où $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $j \neq k$.

d) Si deux lignes ou deux colonnes de A sont proportionnelles alors le déterminant de A est nul.

Commentaires Dans le cas de la propriété $d)$: si deux lignes ou deux colonnes sont proportionnelles, par exemple si $C_j = \alpha C_k$ pou $j \neq k$, alors en effectuant une opération du type $c)$, plus précisément si on effectue comme opération :

$$C_j \longleftarrow C_j - \alpha C_k$$

la nouvelle colonne C_j devient nulle et par conséquent on obtient bien que le déterminant de la matrice est nul.

On va essayer de montrer à travers des exemples comment utiliser ces propriétés et en quoi, elles peuvent faciliter le calcul du déterminant d'une matrice A.

Exemple 3 Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 9 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On veut calculer le déterminant de A en utilisant les propriétés ci-dessus.

$$\det A = \begin{vmatrix} -3 & 6 & 9 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

On remarque que dans la ligne L_1 et dans la ligne L_2, il y a un facteur proportionnel à tous les coefficients de la ligne, d'après la propriété $b)$, on peut les mettre en facteur, on obtient alors

$$\det A = 3 \times 2 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

On pose

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Pour calculer Δ, on va faire apparaître des zéros dans la colonne C_1 (par exemple). on effectue les opérations suivantes :

$$L_2 \longleftarrow L_2 + L_1 \text{ et } L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

Pour terminer le calcul de Δ, il reste à développer le déterminant par rapport à la première colonne.

$$\Delta = -1 \times \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1(-2+5) = -3$$

D'où $\det A = -18$.

Exercice 1

1) Calculer le déterminant de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ -3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On pose

$$\Delta = \det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ -3 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

2) Calculer le déterminant de la matrice C suivante : on fera apparaître au préalable des 0 dans une même ligne ou une même colonne en utilisant la propriété 2 point c).

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Correction Voir Tableau

2.2 Matrices carrées inversibles

Définition 1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non nulle. On dit que A est une matrice <u>inversible</u> s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = I_n$.
B est l'inverse de A et on la note $B = A^{-1}$.

Propriété 1 Si A et B sont des matrices inversibles alors AB est une matrice inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

En effet, soit A et B deux matrices de taille n alors $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = (AI_n)A^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

De même,

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = (B^{-1}I_n)B = B^{-1}B = I_n \quad \square$$

Dans la propriété qui suit, on va caractériser les matrices inversibles à l'aide du déterminant et on va donner une méthode pour calculer l'inverse d'une matrice lorsque celle-ci est inversible. On admet le résultat suivant.

Propriété 2 Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

i) A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

ii) Si A est une matrice inversible alors l'inverse de A est la matrice

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,{}^t B$$

où B est la **matrice des cofacteurs** de la matrice A dont le coefficient $b_{i,j}$ situé à la place (i,j) (sur la i-ème ligne et j-ème colonne) vérifie

$$\forall\ 1 \leq i,j \leq n,\ b_{i,j} = (-1)^{i+j}\det(A_{i,j})$$

B est aussi appelée **la comatrice** de la matrice A.

Exercice 1 *Méthode à retenir*

On considère la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Montrons que A est inversible.

b) Calculons l'inverse de A.

c) Vérifiez que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$.

a) Voir tableau.
b) D'après la propriété ci-dessus,

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\ {}^t B$$

où B est la matrice des cofacteurs de A.

Pour calculer les cofacteurs de A, on part de la matrice A et on positionne sur chaque ligne et chaque colonne les signes + et − comme dans la calcul d'un déterminant (ce qui traduit les facteurs $(-1)^{i+j}$ de la formule donnant l'expression des cofacteurs).

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

On commence par calculer le premier cofacteur (ligne 1 et colonne 1) : ligne 1 et colonne 1 sont précédées du signe +

$$b_{1,1} = +\det(A_{1,1}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-2 = -3$$

On a alors

$$B = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ 5 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 5 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

On déduit

$$
{}^tB = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

D'où

$$
A^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

c) A terminer...

Remarques 1

- Pour des matrices de taille $n \geq 4$, cette méthode est longue. Il existe une autre méthode basée sur le pivot de Gauss.
- Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible alors $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Vous pouvez démontrer ce deuxième point à titre d'exercice.

Exercice 2

On considère la matrice A suivante :

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.
$$

Montrez que la matrice A est inversible puis calculez son inverse et vérifiez que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$.

Exercice 3

On considère le polynôme défini par $P_A(X) = \det(A - XI_3)$ où A est la matrice

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Calculez P_A et déterminez ses racines.

Exercice 4

Calculez les déterminants suivants : on fera un premier calcul direct puis un second en faisant au préalable apparaître des zéros.

$$
\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \; ; \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}
$$