Chapitre 14

Développements limités suite : calculs et applications.

Dans ce deuxième chapitre consacré aux développements limités, on va apprendre à additionner (et donc soustraire), multiplier, quotienter et composer des DL en 0. On complètera les applications vues dans le chapitre précédent et on généralisera la notion de DL.

1 Opérations sur les DL

On pose les hypothèses de départ qui seront utilisées pour toutes les opérations que nous allons définir par la suite : somme, produit, quotient et composition de DL.

Soit f et g définies au voisinage de 0, on suppose que f et g admettent un $DL_n(0)$:

$$f(x) = P_n(x) + x^n\varepsilon_1(x)$$

$$g(x) = Q_n(x) + x^n\varepsilon_2(x)$$

où P_n (partie régulière du DL de f en 0) et Q_n (partie régulière du DL de g en 0) désignent des polynômes de degré inférieur ou égal à n . Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$.

Remarque 1 Pour toute opération sur les DL, il est impératif d'avoir des DL du même ordre. On rappelle que l'ordre n du DL est donné par le terme complémentaire "$x^n\varepsilon(x)$".

1.1 Somme et produit

Faisons la somme

$$f(x)+g(x) = \underbrace{P_n(x) + Q_n(x)}_{\text{où } \deg_{(P_n+Q_n)\leq n}} + x^n\left[\varepsilon_1(x)+\varepsilon_2(x)\right] = P_n(x)+Q_n(x)+x^n\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$

On déduit la propriété suivante

Propriété 1 *Avec les hypothèses ci-dessus, $f+g$ admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est $P_n + Q_n$.*

Remarque Evidemment, on peut faire la différence de DL d'ordre n en 0, la partie régulière est obtenue en faisant la différence des parties régulières et on n'oublie pas le terme complémentaire !

Faisons le produit

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = \underbrace{P_n(x)Q_n(x)}_{\text{où } \deg(P_nQ_n) \geq n} + x^n\left[Q_n(x)\varepsilon_1(x) + P_n(x)\varepsilon_2(x) + x^n\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)\right]$$

On pose

$$\varepsilon_3(x) = \left[Q_n(x)\varepsilon_1(x) + P_n(x)\varepsilon_2(x) + x^n\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)\right] \text{ où } \lim_{x\to 0}\varepsilon_3(x) = 0$$

Et dans le produit P_nQ_n, on ne conserve que les termes de degré inférieur ou égal à n, tout le reste part dans le terme complémentaire, on a alors

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = R_n(x) + x^n\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$

On déduit la propriété suivante

Propriété 2 *Avec les hypothèses ci-dessus, fg admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est obtenue en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n dans le produit P_nQ_n.*

Exercice 1

a) Donnez le $DL_3(0)$ de $x \mapsto \sin(x) + \cos(x)$,

b) Donnez le $DL_2(0)$ de $x \mapsto \cos(x) - \text{ch}(x)$,

c) Donnez le $DL_2(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+x}\cos(x)$.

Correction a) On connait les $DL_3(0)$ des fonctions cosinus et sinus :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$

On a alors facilement

$$\sin(x) + \cos(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$

c) On connait les $DL_2(0)$ de la fonction cosinus et de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$.

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$

On a alors

$$\cos(x)\sqrt{1+x} = \left(1-\frac{x^2}{2}\right)\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}\right)+x^2\varepsilon(x)$$

$$\cos(x)\sqrt{1+x} = 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)$$

$$\cos(x)\sqrt{1+x} = 1+\frac{x}{2}-\frac{5x^2}{8}+x^2\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

Dans le produit des parties régulières, on n'a conservé que les termes dont le degré est inférieur ou égal à 2, tous les autres termes sont passés dans le terme complémentaire $x^2\varepsilon(x)$.

1.2 Complément : division de polynômes suivant les puissances croissantes

On va définir une division pour les polynômes qui est nommée division selon les puissances croissantes. **Ne pas confondre avec la divison euclidienne de polynômes !**
On admet la propriété suivante.

Propriété 3 *Soit A et B deux polynômes à coefficients réels tels que $B(0) \neq 0$ (on suppose que le terme constant de B est non nul). Alors on peut effectuer la division selon les puissances croissantes à l'ordre n de A par B, il existe deux polynômes uniques Q de degré n et R (à coefficients réels) tels que*

$$A = BQ + X^{n+1}R$$

Q est appelé **le quotient** *dans la division selon les puissances croissantes à l'ordre n de A par B* et *$X^{n+1}R$ le reste.*

Voyons comment procéder sur un exemple.

Exemple 1 Effectuer la division selon les puissances croissantes à l'ordre 2 de $A(X) = 1+2X+3X^2$ par $B(X) = 1+X$. Ici $B(0) \neq 0$, on peut effectuer la division de A par B selon les puissances croissantes à l'ordre 2. Voir tableau

1.3 Quotient de DL

On rappelle les hypothèses de départ et on rajoute une hypothèses fondamentale pour pouvoir quotienter des DL (en 0).

Soit f et g définies au voisinage de 0, on suppose que f et g admettent un $DL_n(0)$:

$$f(x) = P_n(x) + x^n\varepsilon_1(x)$$

$$g(x) = Q_n(x) + x^n\varepsilon_2(x)$$

On suppose en outre que $g(0) = Q_n(0) \neq 0$.

P_n désigne toujours le partie régulière du DL de f en 0 et Q_n la partie régulière du DL de g en 0 et $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$.

On admet la propriété suivante et on va s'entrainer sur un exemple.

Propriété 4 *Avec les hypothèses ci-dessus, $\frac{f}{g}$ admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est le quotient de la division de P_n par Q_n à l'ordre n selon les puissances croissantes.*

Exercice 2

a) Soit f et g deux fonctions dont on connait le DL à l'ordre 2 en 0 :

$$f(x) = 2 - x + x^2 + x^2\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

$$g(x) = 1 + x + x^2 + x^2\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Montrer que $\frac{f}{g}$ admet un DL en 0 à l'ordre 2 et donner ce DL.

b) Donner le $DL_3(0)$ de la fonction $x \mapsto \tan(x)$ (on n'oubliera pas de justifier au préalable son existence).

1.4 Pause Exercices

Exercice A

On considère la fonction f définie en 0 et admettant comme développement limité d'ordre 5 en 0, le développement suivant : $f(x) = -1 + 2x + x^3 + 2x^4 - x^5 + x^5\varepsilon(x)$ où $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

1. Donnez le développement limité, en 0, de f à l'ordre 3.
2. Montrez que f est dérivable en 0.
3. Donnez l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point de coordonnées $(0, f(0))$.
4. En déduire la position de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage de 0 (on justifiera soigneusement et on fera ensuite un petit dessin).

Exercice B *Utilisation des D. L. pour trouver des équivalents et calculer des limites*

1. Donner un équivalent au voisinage de 0 pour chacune des fonctions suivantes: $f_1(x) = 1 - \sqrt{1+x}$, $f_2(x) = \cos x - 1$, $f_3(x) = x - \ln(1+x)$.

2. Calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_1(x)}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{f_2(x)}{x^2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{f_2(x)}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{f_3(x)}{2x^2}$$

Exercice C *Calculs sur les développements limités*

Ecrire les développements limités en 0 des fonctions suivantes :

a) $x \to \sin(x)\ln(1+x)$ à l'ordre 3.

b) $x \longmapsto \tan(x)$ à l'ordre 5 en utilisant les développements limités en 0 des fonctions sinus et cosinus.

c) $x \to \dfrac{\sqrt{1+x}}{1-x}$ à l'ordre 2 (de deux manières différentes).

1.5 Développement limité d'une fonction composée

On admet la propriété suivante.

Propriété 5 *On suppose que f et g admettent un $DL_n(0)$ et $g(0)=0$. Alors $f\circ g$ admet un $DL_n(0)$.*

A l'aide d'exemples, on va donner la méthode qui permet d'obtenir (si les hypothèses sont satisfaites) le DL d'une composée de fonctions.

Exemples simples 1

- Donner le $DL_4(0)$ de $x \mapsto e^{-x}$.
- Retrouver le $DL_4(0)$ de la fonction ch.
- Donner le $DL_2(0)$ de $x \mapsto e^{x^2}$.

Exemple plus délicat 2 On veut calculer le $DL_3(0)$ de la fonction h définie par

$$h(x) = \ln(1+\sin x).$$

On pose $f(x) = \ln(1+x)$ et $g(x) = \sin(x)$. f et g admettent un $DL_3(0)$ et $g(0) = \sin(0) = 0$. D'après la propriété 5, $h = f\circ g$ admet un $DL_3(0)$.

Méthode : pour obtenir ce DL, on écrit les $DL_3(0)$, des fonctions f et g.

$$f(u) = \ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + u^3\varepsilon(u)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{0} \varepsilon = 0$.

Point méthode : on remplace u dans la partie régulière du DL de f par $x - \dfrac{x^3}{6}$ (qui est la partie régulière du DL de g) et on ne conserve que les termes de degré ≤ 3.

$$\ln(1+\sin x) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + x^3\varepsilon(x)$$

$$\ln(1+\sin x) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

On a alors

$$\ln(1+\sin x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

1.6 Intégration de développements limités

Propriété 6 *Soit f une fonction dérivable sur I intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 dont la dérivée f' admet un $DL_n(0)$ alors f admet un$DL_{n+1}(0)$ dont la partie régulière est obtenue en intégrant la partie régulière du développement limité de f' et en rajoutant $f(0)$. Si*

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

alors

$$f(x) = f(0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Exemple 1 Retrouvons le $DL_5(0)$ de $f \ : \ x \mapsto \ln(1+x)$ à partir du DL de sa dérivée.

f est dérivable sur $I =]-1, +\infty[$ et pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$. On connait le $DL_4(0)$ de f'. On a

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + x^4\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

D'apr'es la propriété ci-dessus :

$$f(x) = \ln(1+x) = f(0) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + x^5\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Or $f(0) = 0$, on a alors,

$$f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + x^5\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

1.7 Pause Exercices

Exercice D

Ecrire les développements limités en 0 des fonctions suivantes :

a) $x \longmapsto e^{\sin x}$ et $x \longmapsto e^{\cos x}$ à l'ordre 4 (on justifiera soigneusement pourquoi on peut composer les développements limités).

b) $x \longmapsto \arctan x$ à l'ordre 3 (on utilisera le développement limité en 0 de sa dérivée).

Exercice E

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$.

1. Donnez le domaine de définition de f.
2. Démontrez que $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4} + \dfrac{x^3}{48} + x^3\varepsilon(x)$ où $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.
3. En déduire, l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point de coordonnées $(0, f(0))$ et la position de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage de 0 (on fera ensuite un petit dessin).

2 Applications des développements limités

2.1 Calculs de limites en 0 ou en un autre point

On a déjà vu dans le chapitre précédent que les DL en 0 permettaient de donner des équivalents en 0 et par conséquent de lever certaines indéterminations pour simplifier le calcul des limites en 0. On peut également utiliser ce procédé pour calculer des limites en d'autres points que 0. L'idée est d'effectuer un changement de variable qui permet de se ramener en 0.

Exercice 3 1. Calculer les limites suivantes

$$I = \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x - \tan x} \ ; \ J = \lim_{x \to 1} \frac{1 - e^{x-1}}{1 - e^{1-x}}$$

2. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \arctan x}{x^3}, \ \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{1 - e^{2x}}, \ \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}, \ \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}.$$

Correction On connait les $DL_3(0)$ des fonctions sinus et tangente (ce dernier a été obtenu précédemment) :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \ ; \ \tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$$

où $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.
On déduit

$$x - \sin(x) = \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \ ; x - \tan(x) = -\frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$$

$$x - \sin(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{6} \text{ et } x - \tan(x) \underset{0}{\sim} -\frac{x^3}{3}$$

D'où

$$\frac{x - \sin x}{x - \tan x} \underset{0}{\sim} \frac{\frac{x^3}{6}}{-\frac{x^3}{3}}$$

$$\frac{x - \sin x}{x - \tan x} \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}$$

Par conséquent

$$I = \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x - \tan x} = -\frac{1}{2}.$$

Pour calculer J, on effectue d'abord un changement de variable afin de se ramener en 0 : on pose $h = x - 1$, on obtient alors

$$J = \lim_{x \to 1} \frac{1 - e^{x-1}}{1 - e^{1-x}} = \lim_{h \to 0} \frac{1 - e^h}{1 - e^{-h}}$$

Or,

$$e^h = 1 + h + h\varepsilon(h) \ ; \ e^{-h} = 1 - h + h\varepsilon(h)$$

où $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.
On déduit

$$1 - e^h = -h + h\varepsilon(h) \ ; \ 1 - e^{-h} = h + h\varepsilon(h)$$

D'où

$$1 - e^h \underset{0}{\sim} -h \text{ et } 1 - e^{-h} \underset{0}{\sim} h$$

$$\frac{1 - e^h}{1 - e^{-h}} \underset{0}{\sim} -1$$

Par conséquent

$$J = \lim_{h \to 0} \frac{1 - e^h}{1 - e^{-h}} = -1$$

2.2 Etude d'une fonction au voisinage de 0

On a vu dans le chapitre précédent que si f est définie en 0 et si f admet un $DL_n(0)$ avec $n \geq 1$ alors f est dérivable en 0, son DL permet d'obtenir l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point de coordonnées $(0, f(0))$ et si $n \geq 2$, il permet d'étudier la position de la courbe par rapport à sa tangente. On va travailler sur un exemple un peu plus compliqué ici.
Exercice 4 (type DS) On considère la fonction f définie sur $I =]-1, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

- Donnez le $DL_2(0)$ de la fonction f.
- En déduire que f est dérivable en 0 et donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point de coordonnées $(0, f(0))$.
- Etudier la position de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage de 0

3 Développements limités généralisés et applications

On se contente dans cette partie d'étudier les développements limités généralisés en $+\infty$. Pour montrer la méthode et les applications possibles, on va travailler sur un exemple.

Exemple Soit la fonction f définie par $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

i) Donner le développement limité généralisé de f en $+\infty$.

ii) Montrer que f admet une droite asymptote au voisinage de $+\infty$.

iii) Etudier la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote en $+\infty$.

Pourquoi DL généralisé ? Parce qu'on travaille en $+\infty$ et la partie régulière du DL ne sera plus un polynôme.

Pourquoi c'est possible : car si x tend vers $+\infty$ alors $y = \frac{1}{x}$ tend vers 0. Dans tous les cas, on se ramène à une quantité qui tend vers 0, et on utilise les DL en 0.

On connait le $DL(0)$ de la fonction exponentielle, on rappelle

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + y^2\varepsilon(y) \text{ où } \lim_{y\to 0}\varepsilon(y) = 0$$

Méthode : on remplace y par $\frac{1}{x}$. On obtient alors le développement limité généralisé de f en $+\infty$.

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(\frac{1}{x}) \text{ où } \lim_{x\to+\infty}\varepsilon(\frac{1}{x}) = 0$$

On peut en déduire que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$. Démontrons-le :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(\frac{1}{x}) = 0$$

On en déduit bien que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$. On peut alors étudier la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote. Pour cela on étudie le signe de la différence $f(x) - 1$ (pour x au voisinage de $+\infty$). On tronque le DL, on a

$$f(x) - 1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x})$$

Si x est au voisinage de $+\infty$, $f(x) - 1$ est du signe de $\frac{1}{x}$ donc toujours positif.

Explication : le terme complémentaire est négligeable devant le terme $\frac{1}{x}$.

Conclusion La courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de son asymptote. Nous avons représenté graphiquement l'allure de la courbe de f au voisange de $+\infty$ sur le tableau.

Attention ! Lorsqu'on travaille sur un DL généralisé en $+\infty$, pour trouver un équivalent en $+\infty$, il faut réfléchir. Ce n'est pas toujours le premier terme non nul dans la partie régulière du DL généralisé.

Exercice 5 (type DS)

On considère la fonction h définie au voisinage de $+\infty$ par son développement limité généralisé :

$$h(x) = 3 - x + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(\frac{1}{x})$$

où $\lim_{x\to+\infty} \varepsilon(\frac{1}{x}) = 0$.

a) Démontrez que la courbe représentative de h admet une droite asymptote au voisinage de $+\infty$ dont vous préciserez l'équation.

b) Etudiez la position de la courbe $\mathcal{C}_h$ par rapport à son asymptote au voisinage de $+\infty$. Illustrez par un schéma.

c) Donnez un équivalent de f en $+\infty$ (Justifiez).

Exercice 6 (type DS) plus difficile

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$.
1. Démontrez que la courbe représentative de f admet une droite asymptote au voisinage de $-\infty$ dont vous préciserez l'équation. Il faudra d'abord calculer un DL généralisé de f en $-\infty$.
2. Etudiez la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote au voisinage de $-\infty$. Illustrez par un schéma.
3. Pour vous entrainer, pour pouvez reprendre les questions et faire l'étude en $+\infty$.