Chapitre 13

Formules de Taylor-Développements limités

Dans ce chapitre une première partie sera consacrée au théorème des accroissements finis puis aux formules de Taylor.

1 Compléments sur les fonctions dérivables

- Formule des Accroissements Finis (forme globale)

  Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) = f(a) + (b-a)f'(c)$.

- Formule des Accroissements Finis (forme locale)

  Soit f une fonction continue sur $[a,a+h]$, dérivable sur $]a,a+h[$ alors il existe $\theta \in]0,1[$ tel que $f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$.

Interprétation graphique Voir tableau.

A quoi sert ce théorème ?

- Cela permet de faire de l'approximation de la valeur d'une fonction en un point.
- Ce théorème permet de démontrer que le sens de variation d'une fonction est liée au signe de sa dérivée.

Rappel Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$ si $f^{(n)}$ existe et est continue sur $[a,b]$.

Remarque 1 Par exemple f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ si f est dérivable sur $[a,b]$ (cela signifie que f' existe sur $[a,b]$) et f' est continue sur $[a,b]$. Par convention une fonction continue sur $[a,b]$ est dite de classe $\mathcal{C}^0$ sur $[a,b]$.

Enfin, la plupart des fonctions que vous connaissez en mathématiques (fonctions usuelles) comme les fonctions polynomiales, les fractions rationnelles (quotients de polynômes), les fonctions cosinus et sinus, la fonction exponentielle, logarithme néperien etc..sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur leur domaine de définition pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. On dit que ces fonctions sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de définition. Elles sont indéfiniment dérivables (dérivables à tout ordre) et leurs dérivées successives sont continues.

2 Formules de Taylor

Tous les résultats de cette première partie sont admis. On va voir différentes formules de Taylor. Ce qui change : les hypothèses. Il y a souvent une partie commune à toutes ces formules et la différence se fait sur ce qu'on va appeler le reste. Suivant la formule utilisée, les applications (ce que peut en faire en mathématiques mais également en physique) seront différentes.

2.1 Formules de Taylor avec reste de Lagrange

Définition 1 *Soit n un entier naturel ($n \geq 1$). On appelle factorielle de n (dit "factorielle n") le produit de tous les entiers inférieurs ou égaux à n. On le note*

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$$

Par convention $0! = 1$. On a $1! = 1$, $2! = 1 \times 2 = 2$, $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ etc....

Théorème 1 *Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n+1$*
Soit f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$, dérivable à l'ordre $n+1$ sur $]a,b[$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

La partie en rouge est appelé : le reste de Lagrange.

Remarque 1 Si $n = 0$, on retrouve la formule des accroissements finis.

Si on pose $b = a + h$, on obtient la forme locale.

Théorème 2 *Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n+1$ (forme locale)*
Soit f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, a+h]$, dérivable à l'ordre $n+1$ sur $]a, a+h[$ alors il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!}f^{(k)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

La partie en rouge est appelé : le reste de Lagrange.

Application au calcul approché de la valeur d'une fonction en un point. Repartons de la formule de Taylor-Lagrange ci-dessus (théorème 2, la forme locale) en supposant que les hypothèses sur la fonction f sont satisfaites.

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!}f^{(k)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

$$\iff f(a+h) - \left[f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) \right] = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

On fait l'hypothèse supplémentaire suivante : on suppose que pour tout $x \in]a, a+h[$, $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ où M est un réel strictement positif (autrement dit on suppose que la dérivée $n+1$-ième de f est majorée sur l'intervalle $]a, a+h[$). On obtient alors

$$\left| f(a+h) - \left[f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) \right] \right| \leq \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!} M$$

Le polynôme $f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a)$ est une valeur approchée de $f(a+h)$ et $\frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!} M$ est une estimation de l'erreur commise si l'on remplace la valeur de $f(a+h)$ par cette valeur approchée.

Exemple 1 *On considère la fonction f définie par $f(x) = \sin(x)$. Les hypothèses sont satisfaites car la fonction sinus est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et ses dérivées successives sont continues (la fonction sinus est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$).*

On peut appliquer la formuler de Taylor-Lagrange à tout ordre et en tout point $a \in \mathbb{R}$. On choisit $a = 0$ et $n = 4$. On va écrire la formule de taylor-Lagrange pour la fonction sinus à l'ordre 5 en $a = 0$.

$$f(h) = f(0) + \sum_{k=1}^{4} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{h^5}{5!} f^{(5)}(\theta h)$$

Si $f(x) = \sin(x)$, $f'(x) = \cos(x)$, $f''(x) = -\sin(x)$, $f^{(3)}(x) = -\cos(x)$, $f^{(4)}(x) = \sin(x)$ et $f^{(5)}(x) = \cos(x)$. D'où
$f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0$. On a alors

$$\sin(h) = h - \frac{h^3}{6} + \frac{h^5}{120} \cos(\theta h)$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\cos(x)| \leq 1$. On a alors

$$\sin(h) - \left[h - \frac{h^3}{6} \right] = \frac{h^5}{120} \cos(\theta h)$$

$$\left| \sin(h) - \left[h - \frac{h^3}{6} \right] \right| \leq \frac{|h|^5}{120}$$

$h - \frac{h^3}{6}$ est une valeur approchée de $\sin(h)$ et $\frac{|h|^5}{120}$ est une estimation de l'erreur commise.

2.2 Formules de Taylor avec reste de Young

Théorème 3 *Formule de Taylor-Young à l'ordre n*
Soit f une fonction définie au voisinage de a (sur un petit intervalle contenant a) telle que $f^{(n)}(a)$ existe alors il existe une fonction ε définie au voisinage de a telle que

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + h^n\varepsilon(h) \text{ où } \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$$

La partie en rouge est appelé : le reste de Young.

Remarque 1 On note que les hypothèses de la formule de Taylor-Young sont plus faibles que celles de Taylor-Lagrange. La formule de Taylor-Young est plus locale, elle est vraie pour "h" petit. Son application principale : les développements limités.

Le plus souvent la formule de Taylor-Young est appliquée au point $a = 0$ et souvent on pose $h = x$, on a alors l'énoncé suivant.

Cas particulier Formule de Taylor-Young à l'ordre n en $a = 0$

Soit f une fonction définie au voisinage de 0 (sur un petit intervalle contenant 0) telle que $f^{(n)}(0)$ existe alors il existe une fonction ε définie au voisinage de 0 telle que

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^n\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$

3 Développements limités

3.1 Définitions

Définition 2 *Soit f définie au voisinage de x_0. On dit que f admet un développement limité d'ordre n en x_0 s'il existe une fonction ε telle que*

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to x_0}\varepsilon(x) = 0$$

Le polynôme $P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n$ est de degré n, c'est la partie régulière du développement limité de f en x_0, la partie en rouge est le terme complémentaire du DL de f en x_0.

Les DL sont généralement étudiés en $x_0 = 0$ (car par changement de variable on peut toujours se ramener en 0, en posant $x = x - x_0$), on a alors la définition suivante (**à retenir**)

Définition 3 *Soit f définie au voisinage de 0. On dit que f admet un développement limité d'ordre n en 0 s'il existe une fonction ε telle que*

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$

Le polynôme $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ est de degré n, c'est la partie régulière du développement limité de f en 0, la partie en rouge est le terme complémentaire du DL de f en 0.

On a la propriété immédiate suivante (très importante).

Propriété 1 *Soit f une fonction définie en 0 et qui admet un développement limité d'ordre n (avec $n \geq 1$) en 0 (en abrégé $DL_n(0)$) alors f est dérivable (et donc en particulier continue) en 0.*
On a en particulier $a_0 = f(0)$ et $a_1 = f'(0)$.
Alors la droite d'équation $y = a_0 + a_1 x$ est tangente à la courbe représentative de f au point de coordonnées $(0, f(0))$.

Démonstration Voir tableau.

A quoi servent les développements limités (en 0) ?

- Calculer des limites (en 0) qui jusques là étaient impossibles à calculer (formes indéterminées). Par exemple, si on veut calculer

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$$

  Cette limite est impossible à calculer si on ne connait pas le DL en 0 de la fonction sinus. La connaissance du DL en 0 de certaines fonctions permet de lever des indéterminations pour le calcul de limites.

- On vient de voir que si f est définie en 0 et si f admet un $DL_n(0)$ où $n \geq 1$ alors f est dérivable (et donc en particulier continue) en 0. Dans ces conditions on peut écrire

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

  et la droite d'équation $y = a_0 + a_1 x$ est tangente à la courbe représentative de f au point de coordonnées $(0, f(0))$. Non seulement, le DL nous a permis d'obtenir l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point de coordonnées $(0, f(0))$ mais il va nous permettre d'étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente.

- nous verrons d'autres applications possibles (dans le chapitre suivant).

Exercice de référence 1

- Soit f définie en 0 et dont on connait son DL à l'ordre 2 en 0 :

$$f(x) = 1 + x + 3x^2 + x^2 \varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

  Montrez que f est dérivable en 0, donnez l'équation de sa tangente au point de coordonnées $(0, f(0))$ et étudiez la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente.

- Idem avec g définie en 0 et dont on connait son DL à l'ordre 3 en 0 :

$$g(x) = -1 + x + x^3 + x^3\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Correction Voir tableau.

g est définie en 0 et elle admet un DL d'ordre 3 en 0, d'après la propriété 1, g est dérivable en 0.
Par ailleurs, toujours d'après la propriété 1, la droite d'équation $y = -1 + x$ est la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point de coordonnées $(0, g(0)) = (0, -1)$. Pour étudier la position de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage de 0, on étudie le signe de la différence $g(x) - (-1 + x)$. Or

$$g(x) - (-1 + x) = x^3 + x^3\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Si x est proche de 0, le signe de la différence dépend du signe de x^3 (en effet, $x^3\varepsilon(x)$ est négligeable devant le terme x^3), or le signe de x^3 dépend du signe de x.

- Si $x > 0$, $x^3 > 0$ et $g(x) - (-1 + x) > 0$. On en déduit que $\mathcal{C}_g$ est au dessus de sa tangente pour $x > 0$ proche de 0.

- Si $x < 0$, $x^3 < 0$ et $g(x) - (-1 + x) < 0$. On en déduit que $\mathcal{C}_g$ est au dessous de sa tangente pour $x < 0$ proche de 0.

Le point de coordonnées $(0, -1)$ est **un point d'inflexion** pour $\mathcal{C}_g$ (la courbe "traverse sa tangente" en ce point). On a illustré cela par un schéma (voir tableau).

Remarque 1 Si f est définie au voisinage de 0 (sauf en 0) et si f admet un $DL_n(0)$ où $n \geq 0$ alors on peut prolonger f par continuité en 0. On notera g son prolongement par continuité, il suffira de poser $g(0) = a_0$ (où a_0 est le premier terme dans la partie régulière du DL de f en 0). Voir exemple en TD pour aller plus loin.

3.2 Unicité des DL et conséquences

On admet le théorème suivant

Théorème 4 *Si f admet un $DL_n(0)$ alors il est unique.*

Remarque 1 Idée de la démonstration. On écrit deux DL de f en 0 à l'ordre n et on montre que les parties régulières sont égales ainsi que les termes complémentaires.
On a aussi la propriété suivante et le théorème suivant (conséquence immédiate)

Propriété 2

- *Si f est une fonction paire alors la partie régulière de son DL ne comporte que des termes de degré pair.*

- *Si f est une fonction impaire alors la partie régulière de son DL ne comporte que des termes de degré impair.*

Théorème 5 *Si f admet un développement limité d'ordre n en 0 $(n \geq 1)$ alors f admet un DL d'ordre p en 0 pour tout $p < n$ (on dit que l'on peut tronquer un DL)*

Démonstration Voir Tableau.

3.3 Une autre application des DL en 0

Soit f une fonction définie en 0 et qui admet un DL en 0, ce DL permet de faire une étude locale de f en 0 : on peut déterminer l'équation de sa tangente au point de coordonnées $(0, f(0)$ et étudier la position de la courbe par rapport à sa tangente. Les DL en 0 permettent également de donner un équivalent de f en 0 et cela permet donc de lever des indéterminations dans le calcul de certaines limites en 0.

Propriété 3 *Soit f une fonction qui admet un $DL_n(0)$ (avec $n \geq 0$) alors un équivalent de f en 0 est donné par le premier terme non nul de la partie régulière du DL.*

démonstration On suppose que f admet un $DL_n(0)$, f s'écrit

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

On suppose ici que le premier terme non nul de la partie régulière du DL de f en 0 est a_0 :

$$f(x) = a_0 \left(1 + \frac{a_1}{a_0}x + \frac{a_2}{a_0}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{a_0}x^n + \frac{1}{a_0}x^n\varepsilon(x)\right)$$

On pose

$$\varepsilon_1(x) = \frac{a_1}{a_0}x + \frac{a_2}{a_0}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{a_0}x^n + \frac{1}{a_0}x^n\varepsilon(x)$$

On a

$$f(x) = a_0 (1 + \varepsilon_1(x)) \text{ où } \lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0$$

On a démontré que

$$f(x) \underset{0}{\sim} a_0$$

Ici on a supposé que le premier terme non nul était a_0, si a_0 est nul, la démonstration se généralise parfaitement avec le premier terme non nul de la forme $a_p x^p$ où $p \geq 1$ (il suffit de le mettre en facteur et d'adapter la démonstration).

Exercice de référence 2

Soit f définie par son DL en 0 à l'ordre 3 :

$$f(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Calculer $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$ et $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - x}{x}$.

Correction

Calculons la première limite : c'est une forme indéterminée. Pour lever l'indétermination, on va chercher un équivalent de f en 0. D'après la propriété 3 et le DL de f en 0, on a

$$f(x) \underset{0}{\sim} x$$

D'où

$$\frac{f(x)}{x} \underset{0}{\sim} 1$$

Par conséquent $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

Calculons la deuxième limite : c'est aussi une forme indéterminée. Pour lever l'indétermination, on va chercher un équivalent de $f(x) - x$ en 0. Or

$$f(x) - x = -\frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

D'où $f(x) - x \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^3}{6}$ et

$$\frac{f(x) - x}{x} \underset{0}{\sim} \frac{-\frac{x^3}{6}}{x}$$

On en déduit que $\dfrac{f(x) - x}{x} \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{6}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{x^2}{6} = 0$.

3.4 Développements limités usuels

Les DL qui suivent sont obtenus à partir de la formule de Taylor-Young à l'ordre n en 0. On rappelle que si f est définie au voisinage de 0 telle que $f^{(n)}(0)$ existe alors

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^n\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Les fonctions usuelles ci-dessous satisfont aux hypothèses de la formule de Taylor-Young.

3.4.1 La fonction exponentielle

$x \mapsto e^x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc en particulier au voisinage de 0. On peut donc appliquer la formule de Taylor-Young à n'importe quel ordre $n \in \mathbb{N}$ au point 0. De plus si $f(x) = e^x$ alors pour tout $n \geq 0$, $f^{(n)}(x) = e^x$ et $f^{(n)}(0) = 1$.

On déduit le développement limité de la fonction exponentielle en 0 à l'ordre n (et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$).

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

3.4.2 Les fonctions cosinus et sinus

$x \mapsto \cos(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc en particulier au voisinage de 0. On peut donc appliquer la formule de Taylor-Young à n'importe quel ordre $n \in \mathbb{N}$ au point 0. De plus si $f(x) = \cos(x)$, $f'(x) = -\sin(x)$, $f''(x) = -\cos(x)$, $f^{(3)}(x) = \sin(x)$, $f^{(4)}(x) = \cos(x)$, ...

On a alors

$$f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = -1, f^{(3)}(0) = 0, f^{(4)}(0) = 1 \cdots$$

On déduit le développement limité de la fonction cosinus en 0 à l'ordre $2n$ (et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$).

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

$x \mapsto \sin(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc en particulier au voisinage de 0. On peut donc appliquer la formule de Taylor-Young à n'importe quel ordre $n \in \mathbb{N}$ au point 0. De plus si $f(x) = \sin(x)$, $f'(x) = \cos(x)$, $f''(x) = -\sin(x)$, $f^{(3)}(x) = -\cos(x)$, $f^{(4)}(x) = \sin(x)$, ...
On a alors

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f^{(3)}(0) = -1, f^{(4)}(0) = 0 \cdots$$

On déduit le développement limité de la fonction sinus en 0 à l'ordre $2n+1$ (et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$).

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Remarques 1 Dans la partie régulière du DL de la fonction cosinus il n'y a que des termes de degré pair (ce qui est normal car c'est une fonction paire) ; dans la partie régulière du DL de la fonction sinus il n'y a que des termes de degré impair (ce qui est normal car c'est une fonction impaire).

Exemples 1
Donnons le DL de la fonction cosinus à l'ordre 4 en 0 :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Si on souhaite le DL à l'ordre 3, on écrira

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Donnons le DL de la fonction sinus à l'ordre 5 en 0 :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Si on souhaite le DL à l'ordre 4, on écrira

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

3.4.3 Les fonctions hyperboliques

On rappelle que $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, ce sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc en particulier au voisinage de 0. On peut donc appliquer la formule de Taylor-Young à n'importe quel ordre $n \in \mathbb{N}$ au point 0.
De plus si $f(x) = \mathrm{ch}(x)$, $f'(x) = \mathrm{sh}(x)$, $f''(x) = \mathrm{ch}(x)$, $f^{(3)}(x) = \mathrm{sh}(x)$, $f^{(4)}(x) = \mathrm{ch}(x)$, ...
On a alors

$$f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = 1, f^{(3)}(0) = 0, f^{(4)}(0) = 1 \cdots$$

On déduit le développement limité de la fonction cosinus hyperbolique en 0 à l'ordre $2n$ (et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$).

$$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

De plus si $f(x) = \mathrm{sh}(x)$, $f'(x) = \mathrm{ch}(x)$, $f''(x) = \mathrm{sh}(x)$, $f^{(3)}(x) = \mathrm{ch}(x)$, $f^{(4)}(x) = \mathrm{sh}(x)$, ...
On a alors

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f^{(3)}(0) = 1, f^{(4)}(0) = 0 \cdots$$

On déduit le développement limité de la fonction sinus hyperbolique en 0 à l'ordre $2n+1$ (et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$).

$$\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

3.4.4 La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$

La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est définie et dérivable sur $I =]-1, +\infty[$. On peut montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I (et donc au voisinage de 0). On peut donc appliquer la formule de Taylor-Young à n'importe quel ordre $n \in \mathbb{N}$ au point 0.

On pose $f(x) = \ln(1+x)$, $f(0) = 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $f'(0) = 1$, $f''(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$, $f''(0) = -1$, pour la suite voir tableau ...
On déduit le développement limité de la fonction f en 0 à l'ordre n (et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$).

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

3.4.5 La fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$

On pose $f(x) = (1+x)^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$, il est facile de montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0. Faisons quelques calculs :

$$\begin{array}{ll}
f(x) = (1+x)^{\alpha} & f(0) = 1 \\
f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} & f'(0) = \alpha \\
f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} & f''(0) = \alpha(\alpha-1) \\
f^{(3)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3} & f^{(3)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \\
\vdots & \vdots \\
f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} & f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)
\end{array}$$

On déduit le développement limité de la fonction f en 0 à l'ordre n (et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$).

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \cdots + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$$

où $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Cas particuliers importants Voir Tableau

Si $\alpha = -1$, on obtient :

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

En remplaçant x par $-x$, on obtient :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Si $\alpha = \frac{1}{2}$, on obtient :

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Remarque 2 Si f est un polynôme de degré n, $(n \geq 0)$, alors f admet un DL à l'ordre n en 0 qui est égal à f (dans ces conditions la fonction ε est nulle). Par exemple, soit f définie par $f(x) = 1 + 2x + 3x^2$. Le DL de f à l'ordre 2 en 0 est

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2$$

Réfléchissez : comment s'écrit le DL de f en 0 à l'ordre 1 ? Et à l'ordre 3 ?

À l'ordre 1, on a

$$f(x) = 1 + 2x + x(3x) = 1 + 2x + x\varepsilon(x) \text{ où } \varepsilon(x) = 3x \;; \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

À l'ordre 3, on a

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2$$

Dans ce cas, tout comme à l'ordre 2, la fonction ε est nulle.