Chapitre 12

Rappels et compléments de géométrie dans le plan et dans l'espace.

On rappelle en tout premier lieu qu'un **vecteur** est "un objet mathématiques" défini par

- sa direction
- son sens (représenté par une flèche)
- sa norme (sa longueur)

Faire très attention lorsque vous manipulez des vecteurs à ce que vous écrivez !
Vous devez savoir additionner (ou soustraire des vecteurs), les multiplier par un réel, et caractériser deux vecteurs qui sont égaux.

1 Systèmes de coordonnées dans le plan

1.1 Coordonnées cartésiennes

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $\{O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$. Tout point M du plan peut-être repéré par deux réels x et y appelés respectivement abscisse et ordonnée du point M. On dit aussi que le couple (x, y) représente les coordonnées cartésiennes du point M et dans ces conditions on peut écrire

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$$

Pour un point M donné, le couple (x, y) est unique.
On rappelle que $OM = ||\overrightarrow{OM}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Enfin si A et B sont deux points du plan de coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B), on rappelle que le vecteur

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\,\overrightarrow{i} + (y_B - y_A)\,\overrightarrow{j}$$

et $AB = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

1.2 Coordonnées polaires

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $\{O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$. Tout point M de coordonnées cartésiennes (x, y) différent de l'origine peut être repéré par un couple unique de réels (ρ, θ) avec $\rho = ||\overrightarrow{OM}||$ $(\rho > 0)$ et θ est la mesure en radian de l'angle orienté (dans le sens trigonométrique) du vecteur $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$ avec comme convention que $\theta \in [0, 2\pi[$.

(ρ, θ) sont les coordonnées polaires de M.
Voir tableau (figure géométrique). On a les relations suivantes :

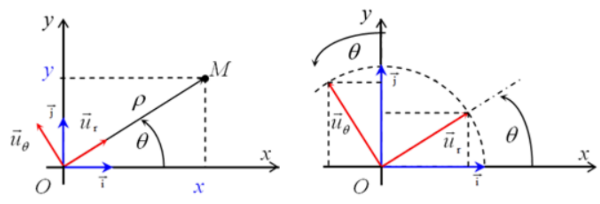
$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$$

ρ est appelé la coordonnée **radiale** (rayon du cercle de centre O et de rayon OM) et θ la coordonnée **angulaire**.

Une nouvelle base (base polaire) peut être définie à partir du point M (on peut la dessiner au point O ou au point M) de la façon suivante :

$$\overrightarrow{OM} = \rho \overrightarrow{u_\rho}$$

où $\overrightarrow{u_\rho}$ est le **vecteur radial**, de même sens et de même direction que le vecteur $\overrightarrow{OM}$, il est unitaire (de norme 1). On lui associe le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_\theta}$ (de norme 1) directement perpendiculaire (dans le sens trigonométrique).



On obtient les relations suivantes (voir tableau)

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_\rho} = \cos(\theta)\vec{\imath} + \sin(\theta)\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{u_\theta} = -\sin(\theta)\vec{\imath} + \cos(\theta)\vec{\jmath} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{\imath} = \cos(\theta)\overrightarrow{u_\rho} - \sin(\theta)\overrightarrow{u_\theta} \\ \vec{\jmath} = \sin(\theta)\overrightarrow{u_\rho} + \cos(\theta)\overrightarrow{u_\theta} \end{cases}$$

2 Équation cartésienne du cercle dans le plan

Ce paragraphe a été traité sur tableau.

3 Coordonnées cartésiennes dans l'espace

On considère l'espace muni d'un repère orthonormé $\{O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$. Tout point M de l'espace peut-être repéré par trois réels x, y et z appelés respectivement abscisse, ordonnée et côte du point M. On dit aussi que le triplet (x, y, z) représente les coordonnées cartésiennes du point M et dans ces conditions on peut écrire

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$$

Pour un point M donné, le triplet (x, y, z) est unique.
On rappelle que $OM = ||\overrightarrow{OM}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
Enfin si A et B sont deux points de l'espace de coordonnées respectives (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B), on rappelle que le vecteur

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\,\overrightarrow{i} + (y_B - y_A)\,\overrightarrow{j} + (z_B - z_A)\,\overrightarrow{k}$$

et $AB = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.
Voir tableau (représentation graphique).

4 Produit scalaire rappels

4.1 Définition et propriétés géométriques

Définition : soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan ou de l'espace, on appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **le nombre réel** noté $\vec{u}.\vec{v}$ défini par

$$\vec{u}.\vec{v} = \begin{cases} 0 \text{ si } \vec{u} \text{ ou } \vec{v} \text{ est nul} \\ ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \cos(\vec{u},\vec{v}) \text{ sinon} \end{cases}$$

Remarques importantes : cette définition est intrinsèque, elle ne dépend que des vecteurs et de l'unité choisie. Elle ne dépend pas du repère ni d'autre chose.

Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls ont des normes fixées, leur produit scalaire est

- maximum lorsque $\cos(\vec{u},\vec{v}) = 1$ ce qui signifie que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction et même sens.
- minimum lorsque $\cos(\vec{u},\vec{v}) = -1$ ce qui signifie que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction mais sont de sens opposé.
- nul lorsque $\cos(\vec{u},\vec{v}) = 0$.

Définition : deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *orthogonaux* lorsque leur produit scalaire est nul. Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Remarque : soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux cela signifie que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ de vecteur directeur respectif $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires.

4.2 Propriétés du produit scalaire

Le produit scalaire possède les propriétés suivantes :

Propriété 1 Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ du plan (ou de l'espace) et pour tout réel λ, on a :

- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ (le produit scalaire est symétrique)
- $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ et $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$
- $(\lambda\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u}.\vec{v})$

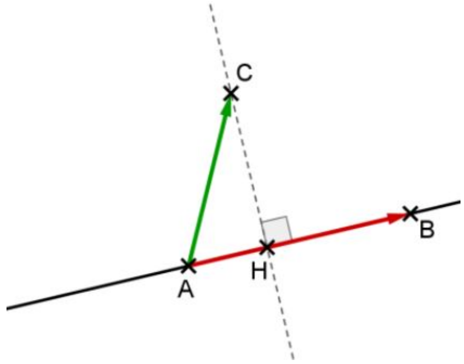
Pour les deux dernières propriétés, on dit que le produit scalaire est **bilinéaire**.

On rappelle la propriété géométrique suivante (importante) qui permet de calculer le produit scalaire de deux vecteurs en utilisant la projection orthogonale.

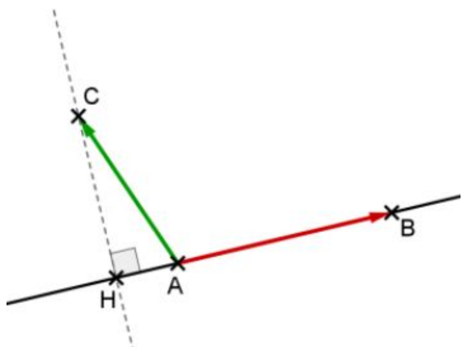
Propriété 2 : soit trois points A, B et C

- si A et B sont confondus alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$.
- si A et B ne sont pas confondus, on appelle H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB), on a alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$

Voir tableau.



Dans ce premier cas : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même direction et de même sens donc
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = ||\overrightarrow{AB}|| \times ||\overrightarrow{AH}|| = AB \times AH$.



Dans ce deuxième cas : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même direction et sens opposé donc
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = ||\overrightarrow{AB}|| \times ||\overrightarrow{AH}|| = -AB \times AH$.

Enfin, on rappelle la propriété souvent utilisée lorsqu'on travaille dans un **repère orthonormé** (expression du produit scalaire en fonction des coordonnées ou encore expression analytique du produit scalaire) :

Propriété 3 Soit $\mathcal{E}$ l'espace muni du repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Si $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}$ alors

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

Cette propriété est valable (en adaptant) si l'on travaille dans le plan $\mathcal{P}$ muni du repère orthonormé $\{O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$.

5 Droites dans le plan

Dans ce paragraphe, on va rappeler la notion de représentation paramétrique et d'équation cartésienne d'une droite dans le plan. On suppose le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $\{O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$.

Définition : toute droite $\mathcal{D}$ dans le plan est définie par la donnée d'un couple $(A, \vec{u})$ où A est un point de $\mathcal{D}$ et $\vec{u}$ un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ ($\vec{u} \neq \vec{0}$). Le couple $(A, \vec{u})$ forme un repère de la droite $\mathcal{D}$. Tout point M appartenant à $\mathcal{D}$ est défini par le fait que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires ($i.e$ proportionnels).

On déduit de la définition comment obtenir une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ définie par le couple $(A, \vec{u})$:

$$\mathcal{D} = \{M \in \mathcal{P} | \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}; t \ \in \mathbb{R}\}$$

Exemple de référence 1 : dans le plan $\mathcal{P}$, on considère $A(1, -1)$ et $\vec{u}(1, 3)$. Donnez une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ définie par le couple $(A, \vec{u})$.

M de coordonnées (x, y) appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$\iff \exists\lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = \lambda\ \vec{u}$$

$$\iff \exists\lambda \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \exists\lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x-1 = \lambda \\ y+1 = 3\lambda \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -1+3\lambda \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ceci est une représentation paramétrique (en colonne) de la droite $\mathcal{D}$. On reconnait les coordonnées du point A et devant le paramètre λ les coordonnées du vecteur $\vec{u}$. Ou encore, on peut écrire (représentation paramétrique en ligne) :

$$\mathcal{D} = \{(1+\lambda, -1+3\lambda)\ ;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

On notera qu'une représentation paramétrique d'une droite **dépend d'un seul paramètre**.

Equation cartésienne : soit la droite $\mathcal{D}$ définie par le couple $(A, \vec{u})$ alors il existe trois réels a, b et c tels que tout point M appartenant à $\mathcal{D}$ a ses coordonnées (x, y) qui vérifient : $\boxed{\text{ax+by=c}}$. Ceci est une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$. A noter que le couple $(a, b) \neq (0, 0)$.

Remarques

- si $b \neq 0$, l'équation cartésienne de $\mathcal{D}$ ci-dessus peut s'écrire $y = -\dfrac{a}{b}x + \dfrac{c}{b}$. On reconnait l'équation cartésienne d'une droite affine de coefficient directeur $-\dfrac{a}{b}$ et d'ordonnée à l'origine $\dfrac{c}{b}$. On notera que $\vec{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.
- si $b = 0$, alors $a \neq 0$ et l'équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ s'écrit : $x = \dfrac{c}{a}$, c'est l'équation d'une droite verticale.

La démonstration de l'existence d'une équation cartésienne de la forme ci-dessus repose sur la méthode décrite dans l'exemple ci-dessous : **comment passer d'une représentation paramétrique à une équation cartésienne**.

Exemple de référence 2 : on revient à la droite $\mathcal{D}$ définie dans l'exemple 1.

$$\mathcal{D} = \{(1+\lambda, -1+3\lambda)\ ;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$M(x,y) \in \mathcal{D} \iff \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On exprime λ en fonction de x (par exemple) : $\lambda = x - 1$ puis on remplace et on obtient $y = -1 + 3(x-1) \iff -3x + y = -4$; on obtient ainsi une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ qui peut également s'écrire sous la forme : $y = 3x - 4$.

Comment passer d'une équation cartésienne de droite à une représentation paramétrique ?

Exemple de référence 3 : soit la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x + y = 1$ ou encore $y = -x + 1$. Donnez une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.

On choisit l'une des coordonnées x (par exemple) qui va jouer le rôle de paramètre. On obtient alors

$$M(x,y) \in \mathcal{D} \iff \begin{cases} x = t \\ y = -t + 1 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ou encore

$$\mathcal{D} = \{(t, 1-t)\ ;\ t \in \mathbb{R}\}$$

Exemple de référence 4 : Soit la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = 2$ (dont la représentation graphique est une droite verticale). Une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ est :

$$M(x,y) \in \mathcal{D} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ou encore

$$\mathcal{D} = \{(2, t)\ ;\ t \in \mathbb{R}\}$$

6 Droites et plans dans l'espace

6.1 Plans dans l'espace

On s'intéresse dans cette partie aux représentations paramétriques et équations cartésiennes de plans dans l'espace. Soit $\mathcal{E}$ l'espace muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
Définition : tout plan (dans l'espace $\mathcal{E}$) est défini par un triplet $(A, \vec{u}, \vec{v})$ constitué d'un point A et de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls et non colinéaires.
Tout point M appartenant au plan $\mathcal{P}$ défini par le triplet $(A, \vec{u}, \vec{v})$ est défini par l'existence de deux nombres réels λ et μ tels que

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}$$

On dit que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est une <u>combinaison linéaire</u> des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Le triplet $(A, \vec{u}, \vec{v})$ forme un **repère du plan** $\mathcal{P}$.

Représentation paramétrique de $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P} = \{M \in \mathcal{E} | \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

On notera qu'une représentation paramétrique d'un plan **dépend de deux paramètres**.

Exemple de référence 5 Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni du repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère A de coordonnées $(1, 1, 1)$ et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnnées respectives $(1, 2, 1)$ et $(1, 1, 2)$.
Donnez une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ défini par le triplet $(A, \vec{u}, \vec{v})$.

On part de la définition : tout point M de coordonnées (x, y, z) du plan $\mathcal{P}$ défini par le triplet $(A, \vec{u}, \vec{v})$ vérifie :

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = 1 + 2\lambda + \mu \\ z = 1 + \lambda + 2\mu \\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

ou encore

$$\mathcal{P} = \left\{(1 + \lambda + \mu, 1 + 2\lambda + \mu, 1 + \lambda + 2\mu) \ ; \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

On a ainsi obtenu une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$.

On s'intéresse maintenant aux **équations cartésiennes** du plan. On peut démontrer la propriété suivante :

Propriété Soit le plan $\mathcal{P}$ défini par le triplet $(A, \vec{u}, \vec{v})$. Alors il existe 4 nombres réels a, b, c, d tels que tout point M de coordonnées (x, y, z) du plan $\mathcal{P}$ vérifie :

$$\boxed{ax + by + cz = d}$$

Cette équation est une <u>équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$</u>.

Remarques : on notera que parmi les réels a, b, c l'un au moins est non nul. Par ailleurs, qu'ils s'agissent de représentations paramétriques ou d'équations cartésiennes d'un plan $\mathcal{P}$, il n'y a pas unicité.

La démonstration de la propriété précédente est basée sur la méthode utilisée **pour passer d'une représentation paramétrique à une équation cartésienne de plan**.

A travers les deux exemples qui suivent, nous allons mettre en évidence les méthodes qui permettent de passer d'une écriture à l'autre.

Exemple de référence 6 Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni du repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère A de coordonnées $(1, 1, 1)$ et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnnées respectives $(1, 2, 1)$ et $(1, 1, 2)$. Il s'agit de l'exemple 1.

Nous avons trouvé précédemment une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$.

$$\mathcal{P} = \left\{(1 + \lambda + \mu, 1 + 2\lambda + \mu, 1 + \lambda + 2\mu) \ ; \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Pour trouver une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ à partir de sa représentation paramétrique, on exprime chacun des paramètres en fonction des coordonnées. Ici, on choisit d'exprimer λ et μ à l'aide de x, y et z. On obtient facilement : $\mu = z - x$ et $\lambda = y - x$. On remplace

$$x = 1 + \lambda + \mu \iff x = 1 + y - x + z - x$$

$$\iff \boxed{3x - y - z = 1}.$$

On a ainsi déterminé une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

Comment passer d'une équation cartésienne à une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$?

Exemple de référence 7 On repart de l'exemple précédent.
Le plan $\mathcal{P}$ est défini par l'équation cartésienne : $3x - y - z = 1$. Toute représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ dépend de deux paramètres, choisissons, par exemple, x et y comme paramètres, on exprime alors z en fonction de x et y.
Notre plan $\mathcal{P}$ est caractérisé par la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = -1 + 3\lambda - \mu \\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

On a facilement que B de coordonnées $(0, 0, -1)$ est un point de $\mathcal{P}$, les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{v_1}$ de coordonnées respectives $(1, 0, 3)$ et $(0, 1, -1)$ sont non nuls et non colinéaires. On peut aussi écrire

$$\mathcal{P} = \left\{(\lambda, \mu, -1 + 3\lambda - \mu) \ ; \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

D'après la représentation paramétrique que l'on vient d'obtenir ci-dessus, on a facilement que le triplet $(B, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1})$ forme un autre repère du plan $\mathcal{P}$. En effet soit M de coordonnées (x, y, z) appartenant à $\mathcal{P}$ alors on a :

$$\begin{cases} x - 0 = \lambda \\ y - 0 = \mu \\ z + 1 = 3\lambda - \mu \\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 0 \\ z + 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

donc tout point M de coordonnées (x, y, z) appartient à $\mathcal{P}$ vérifie l'égalité :

$$\overrightarrow{BM} = \lambda \overrightarrow{u_1} + \mu \overrightarrow{v_1}$$

Définition : soit le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $ax + by + cz = d$. Le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (a, b, c) est appelé vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

Remarque On rappelle que nous travaillons dans l'espace muni du repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Le vecteur $\vec{n}$ normal au plan $\mathcal{P}$ est orthogonal à tout vecteur du plan $\mathcal{P}$; en particulier le produit scalaire de $\vec{n}$ avec tout vecteur du plan $\mathcal{P}$ est nul.

6.2 Droites dans l'espace

La définition et la notion de représentation paramétrique d'une droite dans l'espace ne changent pas par rapport à ce que nous avons vu pour les droites dans le plan.

- Toute droite dans l'espace est définie par la donnée d'un couple $(A, \vec{u})$ où A est un point de $\mathcal{D}$ et $\vec{u}$ un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

- Une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ définie par le couple $(A, \vec{u})$ est

$$\mathcal{D} = \left\{ M \in \mathcal{D} \mid \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u} \ ; \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Exemple de référence 8 Nous travaillons dans l'espace muni du repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.Soit la droite $\mathcal{D}$ définie par le couple $(A, \vec{u})$ où A a pour coordonnées $(1,1,1)$ et $\vec{u}$ a pour coordonnées $(1,2,-1)$. Donnez une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.

M de coordonnées (x, y, z) appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a alors : $\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\iff \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 1 - \lambda \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ou encore $\mathcal{D} = \{(1+\lambda, 1+2\lambda, 1-\lambda) \ ; \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Ce qui change dans l'espace pour les droites, c'est la notion d'équation cartésienne.
On admet les propriétés suivantes :

Propriété Toute droite dans l'espace est obtenue à l'intersection de deux plans.

On déduit alors

Propriété On considère l'espace $\mathcal{E}$ muni du repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soit la droite $\mathcal{D}$ définie par le couple $(A, \vec{u})$. Alors il existe des réels a, b, c, d et des réels a', b', c', d' tels que pour tout point M de $\mathcal{D}$, ses coordonnées (x, y, z) vérifient $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$

C'est un couple d'équations qui définie la droite $\mathcal{D}$.

7 Produit vectoriel

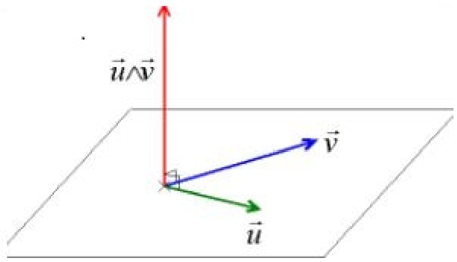
Soit $\mathcal{E}$ l'espace muni du repère orthonormé $\{O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de l'espace, on souhaite définir **un nouveau vecteur** à partir des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On rappelle qu'un vecteur est défini en fonction de trois caractéristiques : sa direction, son sens et sa longueur (=sa norme).

7.1 Définition-Propriétés

Définition : soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. **Le produit vectoriel** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est **l'unique vecteur** $\vec{w}$ vérifiant les conditions suivantes :

- $\vec{w} = \vec{0}$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, sinon
- $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (cela donne **la direction** du vecteur $\vec{w}$)
- $||\vec{w}|| = ||\vec{u}|| \ ||\vec{v}|| \ |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$ (cela donne **la norme** du vecteur $\vec{w}$)
- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme un <u>trièdre direct</u> *i.e.* de <u>même orientation</u> que le trièdre $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ (cela donne **le sens** du vecteur $\vec{w}$)

  Le vecteur $\vec{w}$ produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté : $\boxed{\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}}$.



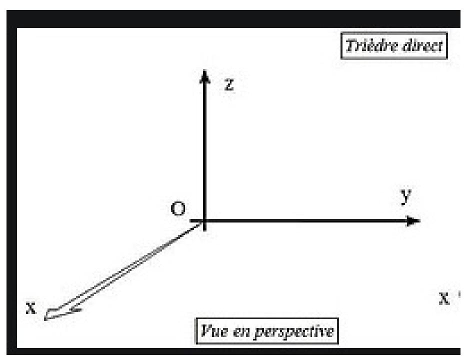
On a alors les propriétés suivantes :

Propriété Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

- $\vec{v}\wedge\vec{u} = -\vec{u}\wedge\vec{v}$ (le produit vectoriel est antisymétrique)
- $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$ ou encore $(\vec{u}+\vec{v})\wedge\vec{w} = \vec{u}\wedge\vec{w}+\vec{v}\wedge\vec{w}$
- Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, $(\alpha\vec{u})\wedge\vec{v} = \vec{u}\wedge(\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u}\wedge\vec{v})$

Pour les deux dernières propriétés, on dit que le produit vectoriel est **bilinéaire**.

Mémento Lorsque vous voulez déterminer le sens de votre vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$, aidez-vous d'un petit dessin en représentant le repère orthonormé $\{O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}$. Le trièdre $\{\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}$ vous donne l'orientation, ce que l'on appelle le sens direct.



Vous utilisez votre main droite, le vecteur $\vec{i}$, votre pouce droit dirigé vers vous, le vecteur $\vec{\jmath}$ l'index de votre main droite positionné vers votre droite, alors votre majeur (toujours main droite) sera orienté vers le haut. Il représente alors votre vecteur $\vec{k}$. Vous avez votre trièdre direct. Ensuite, il vous suffit de positionner le pouce dans le sens de votre vecteur $\vec{u}$, l'index dans le sens de $\vec{v}$ et par conséquent votre majeur vous indiquera le sens de $\vec{u}\wedge\vec{v}$.

Exercice 1 (applications directes) Calculer les produits vectoriels suivants (voir tableau)

$$\vec{\imath}\wedge\vec{\jmath}\ ;\ \vec{\jmath}\wedge\vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\wedge\vec{k}\ ;\ \vec{\imath}\wedge(3\vec{\imath})\ ;\ (2\vec{\imath}+3\vec{\jmath}-\vec{k})\wedge(2\vec{\jmath})\ ;\ (\vec{\imath}+\vec{\jmath})\wedge(\vec{\jmath}+2\vec{k})$$

7.2 Expression analytique du produit vectoriel

Définition : dans l'espace $\mathcal{E}$ muni du repère orthonormé $\{O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}$, on considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Alors le vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} yz'-zy' \\ zx'-xz' \\ xy'-yx' \end{pmatrix}$.

Par définition, le produit vectoriel de deux vecteurs est nul dès que les vecteurs sont colinéaires. On peut ainsi déduire une caractérisation d'une base d'un plan.

Propriété Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base d'un plan si et seulement si $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$.

Exercice 2 (applications directes)
On considère l'espace muni du repère orthonormé $\{O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$.

Dans chacun des cas ci-dessous, calculer les coordonnées du vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

- $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$
- $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Voir tableau.

8 Produit mixte

Soit $\mathcal{E}$ l'espace muni du repère orthonormé $\{O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$.

8.1 Définition-Propriétés

On sait que par définition le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$. On déduit alors facilement la propriété suivante.

Propriété 1 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, on a :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{u} = (\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{v} = 0$$

Définition : dans l'espace $\mathcal{E}$ muni du repère orthonormé $\{O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$, on considère les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. On appelle **produit mixte** des trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, le nombre réel noté $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ défini par

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w}$$

On va énoncer quelques propriétés du produit mixte :

Propriété 2 Le produit mixte de trois vecteurs est **trilinéaire** i.e

- $[\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}]$
- $[\vec{u}, \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{v}_2, \vec{w}]$
- $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_1 + \vec{w}_2] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_1] + [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_2]$
- Pour tout réel $\alpha \in \mathbb{R}$, $[\alpha\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \alpha\vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \alpha\vec{w}] = \alpha[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$

A partir des propriétés ci-dessus, de la définition du produit mixte et du produit vectoriel on déduit facilement que si parmi les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, deux au moins sont colinéaires alors leur produit mixte est nul.
En particulier $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}] = 0$.

Propriété 3 Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace, on a :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w})$$

Plusieurs conséquences importantes qui découlent des propriétés et des différentes définitions sur le produit mixte et le produit vectoriel :

- Si on permute deux vecteurs (parmi les trois) dans le produit mixte $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, cela change le signe du produit mixte. Par exemple $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.
- Si "on fait glisser les vecteurs", le produit mixte est inchangé : $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]$.

Exercice 3 On considère trois vecteurs de l'espace $\mathcal{E}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et on suppose que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 2$. Calculez le produit mixte $A = [2\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} + \vec{v}]$.

8.2 Expression analytique du produit mixte

On se place dans l'espace $\mathcal{E}$ muni du repère orthonormé $\{0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$, on considère les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$.
On sait par définition que le produit mixte des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w}$$

On commence par calculer les coordonnées du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$, on obtient $\begin{pmatrix} yz_1 - zy_1 \\ zx_1 - xz_1 \\ xy_1 - yx_1 \end{pmatrix}$.
On calcule ensuite le produit scalaire des vecteurs $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\vec{w}$. On obtient alors l'expression analytique du produit mixte :
$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{pmatrix} yz_1 - zy_1 \\ zx_1 - xz_1 \\ xy_1 - yx_1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = x_2(yz_1 - zy_1) + y_2(zx_1 - xz_1) + z_2(xy_1 - yx_1).$
Nous allons étudier dans un prochain chapitre sur les matrices la notion de déterminant d'une matrice carrée.
Vous avez rencontré cette notion en électricité pour la résolution de systèmes linéaires (méthodes de Cramer). Cette méthode utilisait des calculs de déterminants.
On va démontrer que calculer le produit mixte des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ revient à calculer le déterminant formé par les coordonnées des trois vecteurs. On a la propriété suivante :

Propriété 4

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}).$$

Pour calculer un déterminant, on a le choix de développer ce dernier par rapport à n'importe quelle ligne ou colonne. Choisissons ici de le développer par rapport à la dernière colonne : attention ne pas oublier les signes $+$ et $-$ sur colonnes et lignes !

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ z & z_1 & z_2 \end{vmatrix} = x_2 \times \begin{vmatrix} y & y_1 \\ z & z_1 \end{vmatrix} - y_2 \times \begin{vmatrix} x & x_1 \\ z & z_1 \end{vmatrix} + z_2 \begin{vmatrix} x & x_1 \\ y & y_1 \end{vmatrix}.$$

Donc

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = x_2(yz_1-zy_1)-y_2(xz_1-zx_1)+z_2(xy_1-yx_1) = x_2(yz_1-zy_1)+y_2(zx_1-xz_1)+z_2(xy_1-yx_1).$$

On a bien démontré que

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}).$$

Exercice 4 Calculer le produit mixte $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ avec $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

D'après la propriété 4, on a

$$\Delta = [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}).$$

Voir tableau

8.3 Une application importante du produit mixte

A l'aide de tout ce qui prédède, on peut déduire une caractérisation simple de vecteurs coplanaires (vecteurs appartenant à un même plan).

Propriété 5 Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ appartiennent au même plan $\mathcal{P}$ si et seulement si $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 0$.

Remarque : si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ appartiennent au même plan $\mathcal{P}$ cela signifie que l'un au moins des vecteurs peut s'écrire en fonction des deux autres. Il est alors facile de montrer que leur produit mixte est nul.

Cette propriété est très utile pour déterminer une équation cartésienne de plan suivant les données.

Exercice 5 On considère trois points A, B et C du plan $\mathcal{P}$ dont les coordonnées respectives sont $(0,0,0)$, $(1,1,1)$ et $(1,2,1)$. Donnez une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

Une façon simple de répondre à cette question est d'utiliser la caractérisation de $\mathcal{P}$ à partir du produit mixte, à savoir M, de coordonnées (x,y,z) appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

Or les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires si et seulement si leur produit mixte est nul. Pour calculer le produit mixte, on utilise son expression analytique, à savoir un calcul de déterminant : on obtient finalement

M, de coordonnées (x,y,z) appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si

$$[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}] = \det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = 0$$

....voir tableau....