Chapitre 11

Fractions rationnelles : décomposition en éléments simples

Introduction : les objectifs de ce chapitre en première année sont de compléter le chapitre d'intégration en donnant une technique qui permet de décomposer des fractions rationnelles (quotients de polynômes) pour pouvoir les intégrer facilement. On va donc apprendre à décomposer les fractions rationnelles (à coefficients réels) en éléments simples.
En deuxième année, vous verrez des applications complémentaires de ce chapitre : en mathématiques pour définir la Transformée de Laplace de certaines fonctions qui s'avèra utile en traitement du signal et en automatique.

1 Premières définitions

Définition 1 *On appelle fraction rationnelle (à coefficients réels) le quotient* $\dfrac{P(X)}{Q(X)}$ *où* P *et* Q *sont deux polynômes (à coefficients réels)* $(Q \neq 0)$.

Définition 2 *Soit la fraction rationnelle* $F(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$. *On dira que* α *est un pôle de* F *si* α *est une racine du polynôme* Q.

Un **pôle** pour une fraction rationnelle est une valeur interdite !

Exemple 1 *Soit* $F(X) = \dfrac{2X+1}{X^3+3X^2+X}$, F *est une fraction rationnelle à coefficients réels et* 0 *est un pôle de* F.

Pour une fraction rationnelle (à coefficients réels), on peut avoir des pôles réels mais également des pôles complexes (racines complexes du dénominateur Q).

Exemple 2 *Soit* $F(X) = \dfrac{5}{(X-1)^2(X+2)(X^2+4)}$, 1 *est un pôle double réel de* F, -2 *est un pôle simple réel de* F, $2i$ *et* $-2i$ *sont des pôles simples complexes de* F.

Exemple 3 *A priori, vous ne savez pas calculer une primitive de*

$$F(X) = \frac{X+1}{X(X-1)(X+2)}.$$

Par contre, si on montre que F *s'écrit* $F(X) = \dfrac{A}{X} + \dfrac{B}{X-1} + \dfrac{C}{X+2}$ $(*)$ *où* A, B *et* C *sont des nombres réels, alors vous saurez calculer une primitive de* F.

Cette décomposition (*) s'appelle la décomposition de F en éléments simples. On va obtenir à la fin du chapitre un théorème qui nous permettra de donner la décomposition en éléments simples de n'importe quelle fraction puis on mettra en évidence des méthodes faciles pour calculer rapidement les coefficients (dans l'exemple A, B et C).

Définition 3 *Soit F une fraction rationnelle (à coefficients réels) $F(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$ où P et Q sont deux polynômes (à coefficients réels) $(Q \neq 0)$. On dit que F est irréductible si P et Q n'ont pas de facteur commun.*

–**Première étape de la décomposition**.

On doit rendre la fraction **irréductible** : on simplifie par tous les facteurs communs éventuels. Comment faire pour rendre une fraction irréductible si elle ne l'est pas ?

Exemple 4 *Considérons $F(X) = \dfrac{X^2-1}{X^3+1}$, F n'est pas irréductible. Pour la rendre irréductible on décompose $P(X)$ (numérateur) et $Q(X)$ (dénominateur) en polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ puis on simplifie par les facteurs qui sont communs. On obtient $F(X) = \dfrac{(X-1)(X+1)}{(X+1)(X^2-X+1)} = \dfrac{X-1}{X^2-X+1}$. On a rendu la fraction F irréductible.*

La technique générale pour rendre une fraction irréductible (=sans facteur commun), si elle ne l'est pas, est de décomposer en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ le numérateur et le dénominateur puis de simplifier par les éventuels facteurs communs.

2 Partie entière d'une fraction rationnelle

Soit $F(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$ une fraction rationnelle. Si $\deg(P) \geq \deg(Q)$, on peut effectuer la division euclidienne du polynôme P par le polynôme Q, on obtient $P = QE + R$ où $\deg(R) < \deg(Q)$ ainsi $F(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)} = \dfrac{Q(X)E(X)+R(X)}{Q(X)} = E(X) + \dfrac{R(X)}{Q(X)}$. Ainsi, on a mis en évidence $E(X)$ qui est la **partie entière de** F et on s'est ramené à une fraction rationnelle dont le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur.

–**Deuxième étape de la décomposition**.

Par ce procédé, on se ramènera toujours à une fraction dont le **degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur**.

Pour décomposer une fraction en éléments simples il faudra toujours vérifier que le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur. **Si ce n'est pas le cas**, soit $F(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$ avec $\deg(P) \geq \deg(Q)$, on effectue alors la division euclidienne du polynôme P par le polynôme Q, on se ramène alors à

$$F(X) = E(X) + \frac{R(X)}{Q(X)}$$

où $\deg(R) < \deg(Q)$ et on décomposera en éléments simples la fraction

$$G(X) = \frac{R(X)}{Q(X)}$$

3 Décomposition de fractions irréductibles $\frac{P}{Q}$ où $\deg(P) < \deg(Q)$

–**Troisième étape de la décomposition**.

On doit décomposer le polynôme $Q(X)$ (dénominateur) en polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$.

Dans le cas général, la décomposition du polynôme Q en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ s'écrit (vu dans le chapitre précédent) :

$$Q(X) = a_n(X-\alpha_1)^{n_1}\cdots(X-\alpha_r)^{n_r}(X^2+p_1X+q_1)^{m_1}\cdots(X^2+p_sX+q_s)^{m_s}$$

où
– les facteurs irréductibles de degré 1 $(X-\alpha_1), \cdots, (X-\alpha_r)$ correspondent aux racines réelles distinctes $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ de multiplicité respective $n_1, \cdots, n_r$ de Q,
– les facteurs irréductibles $(X^2+p_1X+q_1), \cdots, (X^2+p_sX+q_s)$ sont des polynômes de degré 2 dont le discriminant est négatif (ils correspondent aux racines complexes conjuguées du polynôme Q).

- Chaque facteur irréductible de degré 1, par exemple, $(X-\alpha_1)^{n_1}$ va donner n_1 **éléments simples de première espèce** de la forme

  $$\frac{A_{n_1}}{(X-\alpha_1)^{n_1}}, \frac{A_{n_1-1}}{(X-\alpha_1)^{n_1-1}}, \cdots, \frac{A_1}{(X-\alpha_1)}.$$

  Les coefficients A_j (pour tout $1 \leq j \leq n_1$) sont des nombres réels.

- Chaque facteur irréductible de degré 2, par exemple, $(X^2+p_1X+q_1)^{m_1}$ va donner m_1 **éléments simples de seconde espèce** de la forme

  $$\frac{B_{m_1}X+C_{m_1}}{(X^2+p_1X+q_1)^{m_1}}, \frac{B_{m_1-1}X+C_{m_1-1}}{(X^2+p_1X+q_1)^{m_1-1}}, \cdots, \frac{B_1X+C_1}{(X^2+p_1X+q_1)}.$$

Les coefficients B_j (pour tout $1 \leq j \leq m_1$) et les coefficients C_j (pour tout $1 \leq j \leq m_1$) sont des nombres réels.

Exemple 5 *Considérons les fractions suivantes F, G et H :*

$$F(X) = \frac{X+1}{X(X-1)(X+2)},\ G(X) = \frac{5}{(X-1)^2(X+2)(X^2+4)},$$
$$H(X) = \frac{2X+1}{(X+1)(X-2)^2(X^2+X+1)}$$

Mettons en pratique ce que nous venons de voir....

Voir tableau.

Correction

$$F(X) = \frac{X+1}{X(X-1)(X+2)} = \frac{P(X)}{Q(X)}$$

F est irréductible, le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur et Q est décomposé en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. D'après le théorème de décomposition ci-dessous, il existe trois réels A, B et C uniques tels que F s'écrive

$$F(X) = \frac{A}{X} + \frac{B}{X-1} + \frac{C}{X+2}$$

Chaque fraction $\frac{A}{X}$, $\frac{B}{X-1}$ et $\frac{C}{X+2}$ est un élément simple de première espèce.

3.1 Théorème général

Théorème 1 *Soit la fraction réelle $F = \frac{P}{Q}$ où*

- *F est irréductible,*
- $\deg(P) < \deg(Q)$,
- $Q(X) = a(X-\alpha_1)^{n_1}\cdots(X-\alpha_r)^{n_r}(X^2+p_1X+q_1)^{t_1}\cdots(X^2+p_sX+q_s)^{t_s}$ *la décomposition de Q en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.*

On pose $\deg(Q) = n_1+\cdots+n_r+2t_1+\cdots+2t_s = N$. *Alors il existe N coefficients réels uniques tels que*

$$F(X) = \left[\frac{A_{1,n_1}}{(X-\alpha_1)^{n_1}}+\cdots+\frac{A_{1,1}}{(X-\alpha_1)}\right]+\cdots+\left[\frac{A_{r,n_r}}{(X-\alpha_r)^{n_r}}+\cdots+\frac{A_{r,1}}{(X-\alpha_r)}\right]$$
$$+\left[\frac{B_{1,t_1}X+C_{1,t_1}}{(X^2+p_1X+q_1)^{t_1}}+\cdots+\frac{B_{1,1}X+C_{1,1}}{(X^2+p_1X+q_1)}\right]+\cdots+\left[\frac{B_{s,t_s}X+C_{s,t_s}}{(X^2+p_sX+q_s)^{t_s}}+\cdots+\frac{B_{s,1}X+C_{s,1}}{(X^2+p_sX+q_s)}\right].$$

3.2 Exemples

Nous allons mettre en évidence sur différents exemples des méthodes simples et pratiques pour calculer les coefficients : méthode des pôles simples, doubles, réels ou complexes, méthode du calcul de la limite de $XF(X)$ en $+\infty$, calcul de la valeur de F en un point.

Revenons sur la fraction F de l'exemple 5 et mettons en évidence la méthode des pôles pour calculer facilement A, B et C.

$$F(X) = \frac{X+1}{X(X-1)(X+2)} = \frac{A}{X} + \frac{B}{X-1} + \frac{C}{X+2}$$

- Calcul de A : 0 est un pôle simple réel.

  Pour enlever le problème posé par 0, on multiplie F par X

  $XF(X) = \dfrac{X+1}{(X-1)(X+2)} = A + \dfrac{BX}{X-1} + \dfrac{CX}{X+2}$: *cette étape pourra se faire de tête, lorsque vous serez à l'aise* !

  Le plus important (qui justifie la méthode de calcul) est la ligne suivante :

  $$\lim_{X\to 0} XF(X) = \frac{-1}{2} = A$$

  donc $A = \dfrac{-1}{2}$.

- Calcul de B : 1 est un pôle simple réel.

  Pour enlever le problème posé par 1, on multiplie F par $X-1$

  $$(X-1)F(X) = \frac{X+1}{X(X+2)} = \frac{A(X-1)}{X} + B + \frac{C(X-1)}{X+2}$$

  $$\lim_{X\to 1}(X-1)F(X) = \frac{2}{3} = B$$

  donc $B = \dfrac{2}{3}$.

- Calcul de C : -2 est un pôle simple réel.

  Pour enlever le problème posé par -2, on multiplie F par $X+2$

  $$(X+2)F(X) = \frac{X+1}{X(X-1)} = \frac{A(X+2)}{X} + \frac{B(X+2)}{X-1} + C$$

  $$\lim_{X\to -2}(X+2)F(X) = \frac{-1}{6} = C$$

  donc $C = \dfrac{-1}{6}$.

Conclusion :

$$F(X)=\frac{-1}{2X}+\frac{2}{3(X-1)}+\frac{-1}{6(X+2)}$$

Ci-dessous d'autres exemples.

Exemple 6 *Décomposer en éléments simples sur* $\mathbb{R}$ *les fractions* $F(X)=\dfrac{4}{(X-2)^2(X+1)}$ *et* $G(X)=\dfrac{1}{(X^2+1)(X-1)}$.

On s'occupe d'abord de la décomposition de la fraction $F(X)=\dfrac{P(X)}{Q(X)}$: vérifions les hypothèses.

F est bien une fraction irréductible (aucun facteur commun entre le numérateur et le dénominateur), le degré du numérateur P est strictement inférieur au degré de Q, enfin $Q(X)=(X-2)^2(X+1)$ est bien décomposé en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$; d'après le théorème de décomposition, il existe trois coefficients uniques A, B et C tels que

$$F(X)=\frac{A}{(X-2)^2}+\frac{B}{X-2}+\frac{C}{X+1}.$$

Pour calculer A : on remarque que 2 est un pôle double de F, on considère alors $(X-2)^2F(X)=\dfrac{4}{X+1}=A+B(X-2)+\dfrac{C(X-2)^2}{X+1}$ et on calcule

$$\lim_{X\to 2}(X-2)^2F(X)=\frac{4}{3}=A.$$

Pour calculer C : on remarque que -1 est un pôle simple de F, on considère alors $(X+1)F(X)=\dfrac{4}{(X-2)^2}=\dfrac{A(X+1)}{(X-2)^2}+\dfrac{B(X+1)}{X-2}+C$ et on calcule

$$\lim_{X\to -1}(X+1)F(X)=\frac{4}{9}=C.$$

Pour le calcul de B, on peut choisir une valeur arbitraire de X (autre que la valeur d'un pôle) par exemple, $X=0$. On calcule $F(0)=1=\dfrac{A}{4}-\dfrac{B}{2}+C$, connaissant les valeurs de A et C, on déduit la valeur de B.
On peut choisir une autre méthode plus simple qui consiste à calculer la limite de $XF(X)$ lorsque X tend vers $+\infty$. On a

$$XF(X)=\frac{4X}{(X-2)^2(X+1)}=\frac{AX}{(X-2)^2}+\frac{BX}{X-2}+\frac{CX}{X+1}.$$

On fait tendre X vers $+\infty$, à la limite on obtient

$$\lim_{X\to+\infty}XF(X)=0=0+B+C.$$

Cette méthode est très simple car on sait facilement, grâce aux équivalents, trouver la limite d'une fraction en $+\infty$.
On en déduit que $B = -C = -\frac{4}{9}$. Finalement, on a obtenu

$$F(X) = \frac{4}{3(X-2)^2} + \frac{-4}{9(X-2)} + \frac{4}{9(X+1)}.$$

On veut maintenant décomposer la fraction rationnelle

$$G(X) = \frac{1}{(X^2+1)(X-1)} = \frac{P(X)}{Q(X)}$$

Vérifions les hypothèses du théorème de décomposition : G est bien une fraction irréductible (aucun facteur commun entre le numérateur et le dénominateur), le degré du numérateur P est strictement inférieur au degré de Q, enfin $Q(X) = (X-1)(X^2+1)$ est bien décomposé en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$; d'après le théorème de décomposition, il existe 3 coefficients réels uniques tels que

$$G(X) = \frac{A}{X-1} + \frac{BX+C}{X^2+1}$$

Pour le calcul de A, on utilise le fait que 1 est un pôle simple réel, on calcule $\lim_{X\to 1}(X-1)G(X) = \frac{1}{2} = A$.
Pour le calcul de C, on peut calculer $F(0)$, puis on détermine B en considérant comme dans l'exemple précédent la limite de $XG(X)$ lorsque X tend vers $+\infty$.
On donne une autre méthode ici. On remarque que i est un pôle simple complexe de la fraction G (i est une racine du dénominateur, plus précisément du polynôme X^2+1). La méthode est la même que dans le cas des pôles réels :

$$(X^2+1)G(X) = \frac{1}{X-1} = \frac{A(X^2+1)}{X-1} + BX + C.$$

On calcule alors la limite suivante :

$$\lim_{X\to i}(X^2+1)G(X) = \frac{1}{i-1} = Bi + C.$$

Or $\frac{1}{i-1} = \frac{-1-i}{2} = Bi + C$, comme B et C sont réels, il s'agit d'identifier deux écritures algébriques d'un nombre complexe, or

deux nombres complexes écrits sous forme algébriques sont égaux si et seulement si leurs parties réelles sont égales et leurs parties imaginaires aussi.
On en déduit que $B = -\frac{1}{2}$ et $C = -\frac{1}{2}$. D'où $G(X) = \frac{1}{2(X-1)} - \frac{X+1}{2(X^2+1)}$

Exercice Décomposer en éléments simples la fraction H définie par

$$H(X) = \frac{X}{(X-3)^2(X-1)}.$$

Attention : ne pas oublier au préalable de vérifier les hypothèses du théorème de décomposition.

Ce qu'il faut savoir faire à la fin de ce chapitre

- savoir reconnaître une fraction qui vérifie les 3 hypothèses du théorème de décomposition,
- si ces 3 hypothèses sont satisfaites, savoir écrire sa décomposition en éléments simples,
- savoir identifier les différents pôles de la fraction,
- savoir utiliser les différentes techniques de calcul des coefficients (méthode des pôles simples, doubles..réels ou complexes, savoir la méthode du calcul de la limite en $+\infty$..)
- dans le cas où la fraction ne vérifie pas une ou plusieurs hypothèses du théorème de décomposition, comment faire en sorte de s'y ramener