Chapitre 1

Les nombres complexes

Historiquement les nombres complexes ont été introduits au 16ème siècle pour un problème mathématiques : résoudre une équation du troisième degré qui n'avait pas de solution dans $\mathbb{R}$. L'idée était d'introduire un nombre dont le carré était négatif (ce qui n'est pas possible dans $\mathbb{R}$). Peu à peu, la théorie des nombres comlexes a été construite et s'est avérée très utile pour la résolution de nombreux problèmes mathématiques et également en physique (électricité, optique, mécanique etc..).

Partons de l'équation "fondamentale de degré 2" $x^2 = a$ où $a \in \mathbb{R}$. On a revu en TD

- Si $a = 0$, l'équation admet une solution unique dans $\mathbb{R}$, à savoir $x = 0$
- Si $a > 0$, l'équation admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, $x_1 = \sqrt{a}$ et $x_2 = -\sqrt{a}$, ce sont les deux nombres réels dont le carré donne a.
- Si $a < 0$, l'équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Donc l'idée est de construire un nouvel ensemble de nombres contenant les ensembles déjà existant $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ et tel que l'équation $x^2 = a$ où $a \in \mathbb{R}$, $a < 0$ admette des solutions.

En quoi cette équation est fondamentale ?

Comme on l'a vu en TD, dans le cas d'une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ on peut toujours se ramener, en mettant le polynôme du second degré sous forme canonique, à une équation du type $X^2 = \alpha$.
Exemple 1 $x^2 + 2x - 8 = (x + 1)^2 - 9$

Résoudre $x^2 + 2x - 8 = 0$ revient à résoudre ....

1 Ecriture algébrique et règles de calcul

Définition 1 *Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ et appelé ensemble des nombres complexes qui vérifie les propriétés suivantes*

- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- *L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$ et les règles de calculs sont conservées.*
- *Il existe un élément de $\mathbb{C}$ noté i qui vérifie $i^2 = -1$ (i est un nombre dont le carré vaut -1)*

- *Tout élément $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de* **manière unique** *$z = x + iy$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Cette écriture est appelée écriture algébrique d'un nombre compexe*

$x = \mathrm{Re}(z)$ "partie réelle de x" et $y = \mathrm{Im}(z)$ est la partie imaginaire de z. Ce sont des nombres réels !

Si $\mathrm{Im}(z) = 0$ alors $z = x \in \mathbb{R}$, z est un nombre réel. Si $\mathrm{Re}(z) = 0$ alors $z = iy$ où $y \in \mathbb{R}$, on dit alors que z est un imaginaire pur.
Exemples 2 $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -2 + 3i$, $z_3 = -3i$, $z_4 = -2$ sont des nombres complexes, z_3 est un imaginaire pur et z_4 un réel.

Une conséquence immédiate importante de la définition (unicité de l'écriture algébrique) est la propriété suivante :

Propriété 1 *Soit $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $x' \in \mathbb{R}$ et $y' \in \mathbb{R}$,*

$$x + iy = x' + iy' \iff x = x' \text{ et } y = y'$$

Autrement dit deux nombres complexes écrits sous forme algébrique sont égaux si et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Remarques intéressantes à ce niveau à propos des équations

L'équation $X^2 = -1$ admet deux solutions dans $\mathbb{C}$, i et $-i$. En effet $i^2 = -1$ et $(-i)^2 = (-i) \times (-i) = i^2 = -1$. On dit que i et $-i$ sont les "racines carrées" dans $\mathbb{C}$ de -1. Ce sont les deux seuls nombres dont le carré est égal à -1.

Dans ces conditions, on sait résoudre dans $\mathbb{C}$, toute équation de la forme $X^2 = a$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $a < 0$.
Exemple 3 Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 = -9$.

Exemple 4 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^2 + 2x + 10 = 0$: on passera par la mise sous forme canonique du polynôme du second degré.

Définition 2 *Tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ où $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, admet un nombre complexe appelé* **conjugué** *de z qui est noté $\overline{z}$ et défini par*

$$\overline{z} = x - iy$$

Un nombre complexe et son conjugué ont la même partie réelle et des parties imaginaires opposées. A noter que $\overline{\overline{z}} = z$.

On peut déduire des propriétés utiles :

Propriété 2 *i)* $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$

ii) $-z = \overline{z} \iff$ *z est un imaginaire pur.*

iii) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ *et* $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$

Preuve Voir tableau
On déduit également des règles de calculs :

Propriété 3 *Soit $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$*

a) $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$,

b) $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$, *si* $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

La preuve est laissée en exercice. Une application importante de cette propriété permet d'obtenir l'écriture algébrique de l'inverse d'un nombre complexe.

Soit $z = x + iy$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, $z \neq 0$. Alors

$$z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2$$

donc $z\overline{z} \in \mathbb{R}$.

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} \iff \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

A retenir : pour obtenir l'écriture algébrique de l'inverse d'un nombre complexe, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué. On utilise la même méthode pour un quotient de nombres complexes.

Exemple 5 Donnez l'écriture algébrique de $z = \frac{1}{1+i}$

Exercice 1 Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

$z_1 = (2+3i)(1+i)$, $z_2 = (3-i)(3+i)$, $z_3 = (1+3i)^2$, $z_4 = \frac{1}{1+2i}$, $z_5 = \frac{2+i}{1+3i}$, $z_6 = \frac{5-3i}{(1-i)(1+2i)}$, $z_7 = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{36}$

Voir tableau

2 Représentation géométrique d'un nombre complexe

On se place dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Alors tout point de ce plan (ou tout vecteur) est caractérisé par le couple de ses coordonnées.

Voir tableau

Définition 3 *Soit $z = x + iy$ un nombre complexe où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On dit que z est l'affixe du point M de coordonnées (x, y), M est appelé l'image de z. On note $M\ (z)$.*
On dit également que z est l'affixe du vecteur $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. $\vec{u}$ est appelé le vecteur image de z.

On a deux interprétations géométriques des complexes, la première est "affine" (relative aux points de $\mathcal{P}$), la deuxième est "vectorielle" (relatives aux vecteurs de $\mathcal{P}$).

Exercice 2 Dans le plan $\mathcal{P}$ muni du repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, placez les points M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 d'affixe respectif $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = \overline{z_1}$, $z_3 = 2i$, $z_4 = -3i$ et $z_5 = 3$. Voir tableau. Que remarquez-vous ?

Propriété 4
Les images de z et de $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
Les images de z et $-z$ sont symétriques par rapport à l'origine du repère O.
Les images de $z \in \mathbb{R}$ sont situés sur l'axe des abscisses et les images de z où z est un imaginaire pur ($z = iy$, $y \in \mathbb{R}$) appartiennent à l'axe des ordonnées.

Remarques Importantes Si M a pour affixe z et si M' a pour affixe z' alors le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z' - z$. Si M a pour affixe z, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour affixe z.

3 Module d'un nombre complexe

Définition 4 *Soit $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On appelle module de z le nombre réel positif noté $|z|$ défini par $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.*

Remarques Importantes (à retenir)

- Si $z = x \in \mathbb{R}$, $|z| = |x|$ (le module de z correspond à la valeur absolue de x).
- Si $z = iy$ où $y \in \mathbb{R}$, z est un imaginaire pur, $|z| = |y|$.
- Si M est l'image de z alors le module de z correspond à la distance de O à M,

$$|z| = OM = ||\overrightarrow{OM}||$$

  Voir tableau.
- $z\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$
- Si M et M' sont d'affixe respectif z et z' alors $MM' = ||\overrightarrow{MM'}|| = |z' - z|$.

Exercice 3 Soit A d'affixe $z = 1 + i$, B d'affixe $z' = 1 - i$, montrez que le triangle OAB est isocèle en O.

Propriété 5
- $|z| = 0 \iff z = 0$.
- *Si* $z \in \mathbb{C}$, $\text{Re}\,(z) \leq |z|$ *et* $\text{Im}\,(z) \leq |z|$.
- *Si* $z \in \mathbb{C}$ *et* $z' \in \mathbb{C}$, $|zz'| = |z| \times |z'|$, *et si* $z' \neq 0$, *alors* $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$. *En particulier* $\left|\dfrac{1}{z'}\right| = \dfrac{1}{|z'|}$.

- $|z| = |\overline{z}| = |-z|$.
- *Inégalité triangulaire* $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

La démonstration est à faire en exercice.
Remarque Si on revient à l'écriture algébrique de l'inverse d'un nombre complexe vue précédemment, si $z \neq 0$,

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

Exemple 6 Donnez l'écriture algébrique de $\dfrac{1}{1+4i}$.

$$\frac{1}{1+4i} = \frac{1-4i}{(1+4i)(1-4i)} = \frac{1-4i}{|1+4i|^2} = \frac{1-4i}{17} = \frac{1}{17} - \frac{4}{17}i$$

Cas particulier des nombres complexes de module égal à 1.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$. Si on représente M l'image de z dans le plan, on a $|z| = OM = 1$. Cela signifie que tous les nombres complexes de module égal à 1 ont leurs images situés à la distance 1 de O (l'origine du repère), cela signifie que tous ces points M d'affixe z appartiennent au cercle de centre O et de rayon $R = 1$ (le cercle trigonométrique).

Si $z \in \mathbb{C}$, tel que $|z| = 1$ alors d'une part $z \neq 0$ et $\left|\dfrac{1}{z}\right| = 1$. Si M est d'affixe z, M appartient au cercle trigonométrique et M' d'affixe $\dfrac{1}{z}$ appartient aussi au cercle trigonométrique.

$$|z| = 1 \iff |z|^2 = 1 \iff z\overline{z} = 1 \iff \overline{z} = \frac{1}{z}.$$

Si z est un nombre complexe de module égal à 1 son inverse est égal à son conjugué.

Exemples 7 donnez des exemples de nombres complexes dont le module est égal à 1.

4 Écriture exponentielle d'un nombre complexe

On a vu au début de ce cours l'écriture algébrique d'un nombre complexe, cette écriture est pratique pour faire des sommes (ou des différences). On va voir une autre écriture qui s'avèrera plus pratique pour les produits et quotients.

4.1 Notation d'Euler

Définition 5 *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe (de module égal à 1) défini par*

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Si $z = e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(\theta) = \mathrm{Re}(z)$ et $\sin(\theta) = \mathrm{Im}(z)$, l'écriture $\cos(\theta) + i\sin(\theta)$ est l'écriture algébrique de $e^{i\theta}$; de plus $|z| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = 1$.

Interprétation dans le plan : si $z = e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$, M d'affixe z appartient au cercle trigonométrique et M a pour coordonnées $(\cos(\theta), \sin(\theta))$. θ est une mesure en radian de l'angle orienté formé par le vecteur $\vec{\imath}$ et le vecteur $\overrightarrow{OM}$, on a $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}) = \theta + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Voir tableau.

Exemples 8 Donnez l'écriture algébrique des nombres complexes suivants, placez leurs images dans le plan.

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}},\ z_2 = e^{i\frac{3\pi}{2}},\ z_3 = e^{i\pi},\ z_4 = e^{2i\pi}$$

Propriété 6

i) Tout nombre complexe z, non nul, de module égal à 1, s'écrit $z = e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$, et θ est une mesure en radian de l'angle orienté formé par le vecteur $\vec{\imath}$ et le vecteur $\overrightarrow{OM}$. Attention, cette écriture n'est pas unique (θ est défini modulo 2π). θ est appelé un argument de z.

ii) $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta = \theta' + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

On a les propriétés suivantes (pratique pour les produits, quotients et puissances).

Propriété 7 *Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta' \in \mathbb{R}$*

i) $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$.

ii) $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$.

iii) $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$.

iv) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.

Voir tableau (point ii)

Exercice 4 $z = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, i est un nombre complexe de module égal à 1. Quel est son inverse, son conjugué, son opposé ? (écriture algébrique et exponentielle)

On déduit aussi les formules d'Euler :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2},\ \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

ATTENTION Soit $x \in \mathbb{R}$, ne pas confondre e^x qui est un nombre réel strictement positif (image de x par la fonction exponentielle étudiée au lycée) et e^{ix} qui est un nombre complexe de module égal à 1 et dont la définition est

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

4.2 Écriture exponentielle d'un nombre complexe, cas général

Définition 6 *Tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ s'écrit sous la forme*

$$z = \rho e^{i\theta}$$

où $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ avec

- *$\rho = |z|$ est unique,*
- *θ est défini modulo 2π (cela signifie à un multiple entier de 2π près). On dit que θ est un argument de z. Attention l'argument n'est pas unique.*

Cette écriture est appelé écriture exponentielle du nombre complexe z.

Remarques importantes et interprétation géométrique de cette écriture

Cela signifie que tout nombre complexe non nul peut sécrire comme le produit de son module par un nombre complexe de module égal à 1.

Si $z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = \rho\cos(\theta) + i\rho\sin(\theta)$, vous avez ainsi l'écriture algébrique de z (à retenir pour passer de l'écriture exponentielle à l'écriture algébrique).

Si M est d'affixe z, cela signifie que M a pour coordonnées $(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$. Que représente ρ et θ pour le point M dans le plan muni d'un repère orthonormé ?

On sait déjà que $\rho = |z| = OM = ||\overrightarrow{OM}||$, $\theta = arg(z)$ est une mesure en radian de l'angle formé par le vecteur $\vec{\imath}$ et le vecteur $\overrightarrow{OM}$, on a $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}) = \theta + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Voir tableau.

Pourquoi $2k\pi$ ne modifie par le nombre complexe z ? Voir tableau
Cette écriture exponentielle très pratique pour les produits et les quotients n'est pas unique (plus exactement la valeur de $\theta = arg(z)$ n'est pas unique). D'où la propriété

Propriété 8 *Soit $\rho > 0$, $\rho' > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta' \in \mathbb{R}$.*

$$\rho e^{i\theta} = \rho' e^{i\theta'} \iff \begin{cases} \rho = \rho' \\ \theta = \theta' + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Deux nombres complexes écrits sous forme exponentielle sont égaux si et seulement si, ils ont le même module et le même argument modulo 2π (à un multiple de 2π près).

Exercice 5 Placez les points M_1, M_2, M_3 et M_4 d'affixe respectif $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$, $z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$, $z_3 = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$. Donnez le module de chacun de ces nombres complexes et leur écriture algébrique.

Exercice 6 Donnez l'écriture exponentielle (sans trop réfléchir) des nombres :
$z_1 = 4i$, $z_2 = \overline{z_1} = -4i$, $z_3 = -2$, $z_4 = 3$. On notera que ces nombres complexes sont des imaginaires purs ou des réels.

Comment passer de l'écriture exponentielle à l'écriture algébrique ?

Très facile en utilisant la définition de $e^{i\theta}$. Voir tableau.

Comment passer de l'écriture algébrique à l'écriture exponentielle ?

Voir tableau.

Exercice 7 Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants

$$z_1 = 1 + i,\ \ z_2 = 1 + i\sqrt{3}, z_3 = 1 + 3i$$

Exercice 8 Soit $x \in \mathbb{R}$. quelle est l'écriture exponentielle de $z_1 = \cos x + i \sin x$? Et celle de $z_2 = \sin x + i \cos x$?

5 Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

On veut résoudre l'équation (E) du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des nombres complexes.

5.1 Cas où a, b et c sont des réels (en parti vu au lycée)

On calcule (sauf si on peut éviter) le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. Si a, b et c sont des réels, Δ est aussi un nombre réel, il a donc un signe, les solutions de l'équation dépendent du signe de Δ.

- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles disctinctes

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a},\ x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

  On remarque que $\sqrt{\Delta}$ et $-\sqrt{\Delta}$ sont les 2 solutions (réelles) de l'équation $X^2 = \Delta$ où $\Delta > 0$

- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution réelle double

$$x_1 = \frac{-b}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées

$$x_1 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a},\ x_2 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

  On remarque que $i\sqrt{|\Delta|}$ et $-i\sqrt{|\Delta|}$ sont les 2 solutions (complexes) de l'équation $X^2 = \Delta$ où $\Delta < 0$

Exemple 9 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^2 + x + 1 = 0$. Voir tableau.

5.2 Cas où a, b et c sont des complexes

On commence par calculer $\Delta = b^2 - 4ac$, $\Delta \in \mathbb{C}$ (attention Δ peut aussi être un réel !). La résolution de l'équation (E) se passe en deux étapes.

- Etape 1 : on commence par résoudre l'équation $X^2 = \Delta$ (plus ou moins difficile), on cherche donc les nombres $X \in \mathbb{C}$ dont le carré est égal à Δ. On notera δ_1 et δ_2 ces deux nombres (on a toujours $\delta_2 = -\delta_1$). On dit que δ_1 et δ_2 sont les "racines carrées" de Δ.

- Etape 2 : les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) $ax^2 + bx + c = 0$ s'écrivent

$$x_1 = \frac{-b+\delta_1}{2a},\ x_2 = \frac{-b-\delta_1}{2a}$$

  On remarque que δ_1 et $-\delta_1 = \delta_2$ sont les 2 solutions (complexes) de l'équation $X^2 = \Delta$ où $\Delta \in \mathbb{C}$

Exemple 10 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) $x^2 - (1-i)x - i = 0$. Voir tableau.
Rappels des étapes : on commence par calculer le discriminant Δ puis on résout l'équation $X^2 = \Delta$ pour trouver δ_1 (et δ_2), puis on trouve les solutions de (E).

6 Applications des nombres complexes à la trigonométrie

6.1 Linéarisation

Linéariser consiste à transformer un produit de cosinus ou sinus (ou une puissance) en une somme. Ce sera utile pour l'intégration par exemple ou pour retrouver certaines formules de trigonomtŕie.
Exemples 11 Linéariser $\cos^2(\theta)$, $sin^2(\theta)$. En TD, on verra d'autres exemples.

6.2 Formule de Moivre

Propriété 9 *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Démonstration On sait que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ donc

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Remarque A partir de l'écriture exponentielle (dans $\mathbb{C}$) on peut retrouver la plupart des formules de trigonométrie.....