Comment bien intégrer ?

On va essayer de mettre en avant des techniques spécifiques pour certains types de fonctions rencontrées dans le cours et dans les différents exercices.
On distinguera d'abord les fonctions suivantes : les fonctions de la forme $x \mapsto e^{kx}P(x)$, $x \mapsto e^{kx}\,(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))$, $x \mapsto \cos^p(x)\sin^q(x)$, $x \mapsto \cos(\alpha x)\cos(\beta x)$ (ou $x \mapsto \sin(\alpha x)\sin(\beta x)$ ou $x \mapsto \cos(\alpha x)\sin(\beta x)$).

1 Produit d'une exponentielle par une fonction polynomiale ou une fonction sinusoïdale

1.1 Méthode 1

On souhaite déterminer une primitive d'une fonction de la forme $x \mapsto e^{kx}P(x)$ où P est un polynôme de degré n, on peut utiliser la méthode vue en début d'année : on sait qu'il existe une primitive de la même forme. On posera $F(x) = e^{kx}Q(x)$ où Q est un polynôme de même degré que P, on dérivera F et on identifie en sachant que $F'(x) = e^{kx}P(x)$. Ces calculs se font en dehors de l'intégrale puis on pourra utiliser la primitive trouvée.

Exemple : on souhaite calculer

$$I = \int_0^1 e^{2x}(x^2 + 2x)\,\mathrm{d}x$$

On veut intégrer $x \mapsto e^{2x}(x^2 + 2x)$, on sait qu'il existe une primitive F définie par $F(x) = e^{2x}(ax^2 + bx + c)$.
On a facilement $F'(x) = e^{2x}(2ax^2 + 2bx + 2c + 2ax + b) = e^{2x}[2ax^2 + (2a + 2b)x + 2c + b) = e^{2x}(x^2 + 2x)$. En identifiant les coefficients des polynômes, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2a + 2b = 2 \\ 2c + b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{1}{2} \\ c = \dfrac{-1}{4} \end{cases}$$

On obtient $F(x) = e^{2x}(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4})$, d'où

$$I = \left[e^{2x}(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4})\right]_0^1 = \frac{3}{4}e^2 + \frac{1}{4}.$$

La même méthode s'applique pour des fonctions de la forme $x \mapsto f(x) = e^{kx}\,(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))$, on sait aussi qu'il existe une primitive de la même forme.

On posera $F(x) = e^{kx}\left(a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)\right)$, pour trouver les coefficients a et b, il suffit de dériver F et d'identifier avec f : $F'(x) = f(x)$. Là aussi les calculs se feront en dehors de l'intégrale.
Ces méthodes sont calculatoires mais elles ont le mérite, avec un peu d'entraînement d'être rapides.

1.2 Méthode 2

Dans les deux cas, on peut également utiliser la formule d'intégration par parties.
Pour les fonctions de la forme $x \mapsto e^{kx}P(x)$ où P est un polynôme de degré n, l'intégration par parties consistera à dériver le polynôme afin d'obtenir une constante. Il y aura autant d'intégration par parties que le degré du polynôme P.

Vous pouvez reprendre le calcul de l'exemple étudié précédemment en utilisant l'intégration par parties.

Pour les fonctions de la forme $x \mapsto f(x) = e^{kx}\left(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)\right)$, il faut **toujours** deux intégrations par parties.

Exemple : on veut calculer

$$I(x) = \int e^{2x}\cos x \, \mathrm{d}x.$$

$$\begin{array}{ll} u(x) = e^{2x} & u'(x) = 2e^{2x} \\ v'(x) = \cos x & v(x) = \sin x \end{array}$$

$$I(x) = [e^{2x}\sin x] - 2\int e^{2x}\sin x \, \mathrm{d}x.$$

On refait une intégration par parties sur la nouvelle intégrale :

$$\begin{array}{ll} u(x) = e^{2x} & u'(x) = 2e^{2x} \\ v'(x) = \sin x & v(x) = -\cos x \end{array}$$

On obtient alors :

$$I(x) = e^{2x}\sin x - 2\big([-e^{2x}\cos x] + 2\int e^{2x}\cos x \, \mathrm{d}x\big)$$

On reconnait entre parenthèses l'intgrale que l'on doit calculer, à savoir $I(x)$, on a donc :

$$I(x) = e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x - 4I(x)$$

d'où $5I(x) = e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x$, finalement on obtient

$$I(x) = e^{2x}(\frac{1}{5}\sin x + \frac{2}{5}\cos x) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Ne pas oublier de rajouter, à la fin, la constante puisque, on devait déterminer l'ensemble des primitives (sur $\mathbb{R}$) de $x \mapsto e^{2x}\cos x$.

2 Puissances de cosinus et sinus

On veut intégrer des fonctions de la forme suivante : $x \mapsto \cos^p(x)\sin^q(x)$ où p et q sont des entiers. Il faut savoir qu'on ne sait pas intégrer directement des produits ou puissances de cos et sin, par contre on sait facilement intégrer des sommes de cos ou de sin.

2.1 Méthode générale

La méthode générale consiste à linéariser (=transformer un produit en une somme) en utilisant les formules d'Euler :

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}.$$

Pour développer les puissances, on peut utiliser la formule du binôme dont les coefficients se retrouvent à partir du triangle de Pascal. La linéarisation se fait en dehors de l'intégrale.

Remarque : dans les cas particuliers de $\cos^2$ et $\sin^2$, c'est bien de connaître par coeur les deux formules suivantes :

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

Dans le cas où p et q **sont tous les deux des entiers pairs**, la linéarisation est la **seule** méthode possible !

2.2 Cas particulier d'une puissance impaire

Lorsque l'on veut intégrer des fonctions de la forme $x \mapsto \cos^p(x)\sin^q(x)$ avec p ou q impair, on peut éviter la méthode précédente et effectuer un changement de variable. Le fait que p ou q soit impair signifie que l'on peut isoler un cos ou un sin et se retrouver avec un élément de la forme $\cos x \, \mathrm{d}x$ ou $\sin x \, \mathrm{d}x$. Cet élément va déterminer le changement de variable à faire !
La question à se poser est la suivante :
que doit-on poser comme nouvelle variable u pour que mon élément différentiel $\mathrm{d}u$ soit égal (au signe près) à l'elément isolé ?

Exemple : calculons $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x \, \mathrm{d}x$
La puissance du cosinus est impaire, on va donc isoler un cosinus :
$I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x \cos x \, \mathrm{d}x$. Que doit-on poser pour nouvelle variable u afin que notre nouvel élément différentiel soit de la forme $\cos x \, \mathrm{d}x$?
Il suffit de poser $u = \sin x$, on obtient, $\mathrm{d}u = \cos x \, \mathrm{d}x$. Reste une petite modification à faire avant d'effectuer le changement de variable, cela consiste à exprimer $\cos^2 x$ en fonction de sinus, on a $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.
D'où

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x \cos x \, \mathrm{d}x = I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x \, \mathrm{d}x = \int_0^1 u^2(1-u^2) \, \mathrm{d}u.$$

$$I = \int_0^1 (u^2 - u^4) \, \mathrm{d}u = \left[\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}.$$

3 Produit de cosinus ou de sinus

On veut intégrer des fonctions de la forme suivante : $x \mapsto \cos(\alpha x)\cos(\beta x)$ ou $x \mapsto \sin(\alpha x)\sin(\beta x)$ ou $x \mapsto \cos(\alpha x)\sin(\beta x)$.
La méthode générale consiste à linéariser, le plus simple est d'utiliser les formules de trigonométrie qui permettent de transformer des produits en somme.
Voici les trois formules à utiliser :

$$\cos a \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2} \quad \sin a \sin b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$$

et enfin

$$\sin a \cos b = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}.$$

Plutôt que de retenir ces 3 formules supplémentaires, je conseille vivement de savoir les retrouver à partir des 4 formules suivantes (qui doivent être connues car elles permettent de retrouver toutes les formules de trigonométrie).
Les formules à connaître sont :

$$(1)\ \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \ ; \ (2)\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

En additionnant (1) et (2) (respectivement en retranchant (1) à (2)), on obtient les deux premières formules ci-dessus.

$$(3)\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \ ; \ (4)\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a.$$

En additionnant (3) et (4), on retrouve la dernière formule rappelée ci-dessus.

Exemple : calculons $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(3x) \cos x \, \mathrm{d}x$
On sait que $\sin(3x)\cos x = \dfrac{\sin(4x) + \sin(2x)}{2}$ d'où

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\sin(4x) + \sin(2x)] \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos(4x)}{4} - \frac{\cos(2x)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

Tout au long du chapitre d'intégration, j'ai essayé d'insister sur le fait que finalement, il ne fallait apprendre que quelques primitives de fonctions usuelles et qu'en utilisant

des techniques d'intégration comme le changement de variables ou l'intégration par parties, on savait intégrer un grand nombre de fonctions.
Quelles sont donc les primitives de fonctions usuelles à connaître ? Pourquoi s'y ramène-t-on aussi souvent ?
Comme on vient de le voir ci-dessus, il est important de savoir inégrer une exponentielle, un cosinus ou un sinus. On doit également savoir intégrer n'importe quelle puissance de la variable car on s'y ramène souvent par un changement de variable.
Il est donc indispensable de connaître : $\displaystyle\int \frac{1}{u}\ \mathrm{d}u = \ln|u| + C$, $C \in \mathbb{R}$ et pour tout $\alpha \neq -1$, $\displaystyle\int u^\alpha\ \mathrm{d}u = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $C \in \mathbb{R}$. Ici, je ne précise pas le domaine de définition des primitives qui varie bien évidemment en fonction des valeurs de α.
On va donner quelques exemples qui illustrent l'importance du changement de variable permettant de se ramener à l'une des primitives que je viens de rappeler.

Exemple 1 : on veut calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(5x+1)^3}\ \mathrm{d}x$.
Ici, il est judicieux d'effectuer le changement de variable $u = 5x + 1$, $\mathrm{d}u = 5\ \mathrm{d}x$, on obtient alors :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(5x+1)^3}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int_1^6 \frac{1}{u^3}\ \mathrm{d}u = \frac{1}{5}\int_1^6 u^{-3}\ \mathrm{d}u = \frac{1}{5}\left[\frac{u^{-2}}{-2}\right]_1^6 = \frac{-1}{10}\left[\frac{1}{u^2}\right]_1^6$$

$$I = \frac{-1}{10}(\frac{1}{36} - 1) = \frac{-1}{10} \times \frac{-35}{36} = \frac{7}{72}$$

Exemple 2 : on veut calculer $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\ \mathrm{d}x$.
Ici, on va effectuer le changement de variable $u = 1 + e^x$, $\mathrm{d}u = e^x\mathrm{d}x$, on obtient alors :

$$J = \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\ \mathrm{d}x = \int_2^{1+e} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} = 2\int_2^{1+e} \frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}} = 2\left[\sqrt{u}\right]_2^{1+e} = 2\left(\sqrt{1+e} - \sqrt{2}\right).$$

Vous avez de nombreux exemples dans le cours et dans les planches de TD. Pour les primitives usuelles à connaître, vous pouvez consulter le formulaire à votre disposition sur le site.

Synthèse rédigée par Nathalie Gonzalez, mise à jour décembre 2017.