I.U.T. d'Aix-Marseille
Département Mesures Physiques

Deuxième semestre 2023/2024

Mathématiques - TD n^{o}13

Espaces vectoriels.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel : avant de faire ces exercices il est nécessaire de savoir

- Si $F \subset E$, comment démontrer que F est un sous-espace-vectoriel de E,
- savoir ce qu'est une famille génératrice (finie) de E,
- savoir ce qu'est une famille libre (finie) de E,
- savoir ce qu'est une base (finie) de E,
- savoir ce qu'on appelle la dimension de E.

Identifiez des éléments d'un espace vectoriel. À faire seul....

Exercice 0 On admet que les ensembles ci-dessous sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels (certains exemples sont issus du cours).
Pour chacun des exemples ci-dessous, on vous demande de traiter les questions suivantes.

a) Choisir deux exemples (concrets) d'éléments de l'ensemble E.
b) Choisir deux éléments quelconques de l'ensemble E.

$$E = \mathbb{R}^3,\ E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ E = \mathbb{R}_2[X],\ E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$E = \{(x, -x)\ ;\ x \in \mathbb{R}\},\ E = \{(x, x+z, z)\ ;\ (x, z) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$E = \mathcal{D} = \{f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ \text{f dérivable sur } \mathbb{R}\}\ ;\ E = \{y \in \mathcal{D} \text{ tels que } y'' + 3y' = 0\}$$

Exercice 1

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Montrez que F est un sous-espace-vectoriel de E. Donnez une base de F (en justifiant soigneusement) et en déduire la dimension de F.

Exercice 2

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions affines. On note $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

a) Comment s'écrivent les éléments de $\mathcal{A}$? Montrez qu'il s'agit de combinaisons linéaires de deux fonctions particulières (appartenant à $\mathcal{A}$).
b) Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
c) Déterminer une base de $\mathcal{A}$ (en justifiant bien évidemment) et en déduire sa dimension.

Exercice 3

On note $\mathcal{D}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$). On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène suivante : y"(x)+y(x)=0 et on appelle $\mathcal{F}$ l'ensemble de ses solutions.

a) Résoudre l'équation différentielle et en déduire l'ensemble $\mathcal{F}$.
b) Montrer que tout élément de $\mathcal{F}$ s'écrit comme une combinaison linéaire de deux éléments particuliers (de $\mathcal{F}$).
c) Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}$.
d) Déterminer une base de F (en justifiant bien évidemment) et en déduire sa dimension.

Exercice 4 *Familles libres dans* $\mathbb{R}^2$ *ou* $\mathbb{R}^3$

Les familles suivantes sont-elles libres ?
1. $\{u_1 = (1, 1); u_2 = (1, 2)\}$ dans $\mathbb{R}^2$?
2. $\{u_1 = (-2, 3); u_2(-6, 9)\}$ dans $\mathbb{R}^2$?
3. $\{(1, 3, 1); (1, 3, -1); (1, 2, 3)\}$ dans $\mathbb{R}^3$?
4. $\{(1, 3, 2); (1, 2, -1)\}$ dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 5

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$, on considère l'ensemble

$$V = \{\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x + 2y + z = 0\}.$$

1. Montrez que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminez une base de V (en justifiant très **soigneusement**) puis en déduire la dimension de V.

Exercice 6

Montrer que les quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$ définis ci-dessous sont liés (on déterminera ensuite une relation de dépendance linéaire entre ces quatre vecteurs).

$$\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{u}_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{u}_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \vec{u}_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7

Montrer que les trois vecteurs ci-dessous forment une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 On admet que les ensembles E ci-dessous sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels

- Dans $E = \mathbb{R}^3$, la famille $\mathcal{F} = \{(1, 3, 1); (1, 3, 0); (0, 3, 1)\}$ est-elle libre ? Si oui, que peut-on en déduire (justifiez) ?
- Dans $E = \mathbb{R}^2$, la famille $\mathcal{F} = \{(1, 2); (2, 4)\}$ est-elle libre ?
- On se place dans $E = \{(-x, 2x)\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$, déterminer une base de E.
- On se place dans $E = \{(x, x - z, z)\ ;\ (x, z) \in \mathbb{R}^2\}$, déterminer une base de E.
- On se place dans $E = \{x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{2x};\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$, déterminer une base de E.