

TD 11 - Polynômes et fractions. Décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} .

Exercice 0 *Compréhension du vocabulaire*

Soit P le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $P(X) = (X-1)^2 X^4 (X+5)(X^2+X+1)$. Donner les racines de P dans \mathbb{R} et leur multiplicité. A-t-on P décomposé en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$? Si c'est le cas, donnez les facteurs irréductibles de la décomposition)

Exercice 1 *Extrait DS III avril 2024*

Décomposer en polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P(X) = X^4 - 16i$.

Exercice 2

1. Décomposer en polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme suivant :

$$T(X) = X^4 + 16.$$

2. En déduire la décomposition en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme T .

Exercice 3

Soit P le polynôme défini par : $P(X) = X^4 - 3X^3 + X^2 + 4$.

- Montrer que 2 est une racine de P .
- Préciser l'ordre de sa multiplicité.
- Donner la décomposition de P en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 4

On pose $P(X) = X^5 + 2X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 5X + 2$. Montrez que -1 est une racine triple de P ; donner la décomposition de P en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 5

1. Mettre la fraction suivante sous forme irréductible puis calculer sa partie entière.

$$F(X) = \frac{X^5 + 1}{X^2 - 1}$$

2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante (**avant de décomposer, on prendra soin de vérifier chaque hypothèse du théorème de décomposition**).

$$G(X) = \frac{X + 1}{X^3 + 2X^2}$$

Exercice 6

1. Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes (**avant de décomposer, on prendra soin de vérifier chaque hypothèse du théorème de décomposition**).

$$a) F(X) = \frac{3}{X(X+2)(X-1)^2}.$$

$$b) G(X) = \frac{2X+1}{(X-1)(X-2)(X^2+1)}.$$

$$c) H(X) = \frac{5}{(X-1)(X-2)(X^2+4)}.$$

2. On considère la fonction g définie par $g(x) = \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)(x^2+1)}$ dont on a donné ci-dessus la décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} .

Calculez $I = \int_0^{\frac{1}{2}} g(x) dx$.

Exercice 7

1. On considère la fraction F définie par $F(X) = \frac{2X^4 + X^2 + 3X + 1}{X^2 - 1}$.

Mettre en évidence la partie entière de F et se ramener à une fraction dont le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur. Décomposer ensuite la fraction obtenue en éléments simples sur \mathbb{R} (on justifiera au préalable que toutes les hypothèses du théorème de décomposition sont satisfaites).

2. Calculer $\int F(x) dx$ (pour $x > 1$).

Exercice 8 *Extrait DS III avril 2024*

On considère la fraction rationnelle F définie par $F(X) = \frac{X + 2}{X(X + 1)^2(X^2 + 1)}$

1. Décomposer cette fraction en éléments simples (n'oubliez pas de vérifier au préalable les hypothèses du théorème de décomposition).

2. Calculer $I(x) = \int F(x) dx$ où $x > 0$.

Exercice 9

Soit F définie par $F(X) = \frac{1}{X^3 - 1}$. Décomposer F en éléments simples.