Mathématiques - TD n°1

Révisions : équations, inéquations, fonctions usuelles

Exercice 0

Faites un récapitulatif sur les ensembles de nombres que vous connaissez. À cette occasion, pensez à réviser les notions et notations suivantes : ensemble, sous-ensemble, élément d'un ensemble, appartenance, inclusion....

Exercice 1 *Des équations et des inéquations du second degré...*

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$x^2 = 4 ; x^2 = 3 ; x^2 = -5 \quad x^2 = 0$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$x^2 - 5x + 6 = 0 ; x^2 + 3x - 2 = 0 ; x^2 + x + 1 = 0 ; x^2 - 3x + 2 = 0$$

a) En utilisant le calcul du discriminant.

b) En mettant chaque trinôme sous forme canonique (pour mettre sous forme canonique pensez à utiliser vos identités remarquables. On révisé les identités remarquables....)

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes (attention le calcul du discriminant n'est pas toujours nécessaire, pensez-y)

$$x^2 - 5x = 0 ; x^2 - 9 = 0 ; x^2 + 10 = 0 ; 3x^2 + 2x = 0$$

4. Résoudre les inéquations suivantes :

$$x^2 + 2x - 1 \geq 0 ; x^2 + x + 1 > 0 ; x^2 + 4x + 5 \leq 0 ; x^2 + 3x + 2 < 0$$

Exercice 2 *La fonction exponentielle, on révisé...*

1. Soit x un réel quelconque, simplifiez les expressions suivantes (si c'est possible) :

- $A = (e^2)^3 e^{-1} e^{x+1}$
- $B = \frac{e^x e^{-1}}{e^{x^2-2x+1}}$
- $C = \frac{e^{2+x}}{e^{x+1}}$
- $D = \frac{e^{3x} + e^x}{e^{4x} + e^x}$
- $E = \frac{e^{-2x} e^{3x}}{e^{-5x}}$
- $F = \frac{(e^{3x})^2}{e^x e^{-2x}}$
- $G = \frac{e(e^{-1} + e^2)}{e^{2x} + e^x}$

2. Résoudre les équations suivantes après avoir déterminé l'ensemble d'étude :

- $e^{2+x} = e^{-x}$
- $e^{2x+3} = 1$
- $e^{-3x} = 0$
- $2e^{-x} = \frac{1}{e^x + 1}$
- $e^{x^2} - e = 0$
- $e^{2x} + 3e^x + 1 = 0$
- $2e^{2x} - e^x = 1$

3. Faire un résumé de tout ce que vous savez sur la fonction exponentielle.

Exercice 3 *Des équations avec contraintes, on réfléchit au domaine de définition de l'équation avant de se lancer dans la résolution...*

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ (ou une partie de $\mathbb{R}$) les équations suivantes :

$$\left(\frac{3x-1}{x+1}\right)^2 = 4 ; \frac{2x-1}{x-1} - \frac{2}{x+1} = 0$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ (ou une partie de $\mathbb{R}$) l'équation

$$x+2 = \sqrt{x^2+2x-3}$$

Remarque importante : ceci est aussi une équation avec contraintes (plus difficile), avant de résoudre, on doit étudier le domaine de définition de l'équation. La bonne question à se poser : quelles contraintes impose la fonction racine carrée ?

Exercice 4 *La fonction logarithme népérien noté $\ln$*

1. Soit x un réel quelconque, simplifiez les expressions suivantes (si c'est possible) :

- $A = \ln\left(\frac{1}{e^x}\right)$
- $B = e^{\ln 5} e^{\ln(x^2+1)}$
- $C = \ln(\sqrt{e^x})$
- $D = e^{2\ln(x^2+3)}$
- $E = e^{\ln(4\sqrt{e^x})-1}$
- $F = \ln(x^4 + x^2) - \ln(x^2)$ (ici $x \in \mathbb{R}^*$, à voir)
- $G = \frac{\ln(e^{x+1} + e)}{\ln(2e^x + 2)}$

2. Résoudre les équations suivantes après avoir déterminé l'ensemble d'étude

- $\ln(x^2) - 1 = 0$
- $\ln(3x) - 8 = 0$
- $\ln(x^2 - 1) = \ln(4) + \ln(2)$
- $\ln(x^2) = (\ln(x))^2$
- $\ln(2-x) = 0$
- $\ln(2x+1) + \ln(-x+1) = 0$

3. Faites un résumé de tout ce que vous savez sur la fonction logarithme népérien.

Exercice 5 *Des inéquations encore...*

Résoudre les inéquations suivantes :

$$(x+2)(3x-5) \leq 0 ; \frac{x+2}{x-4} \geq 0 \quad (3x+1)^2 \geq (3x+1)(x-3)$$

Exercice 6 *Des révisions toujours...*

1. Sur la valeur absolue : soit a et b deux réels, que représente $|a-b|$? Soit a un réel, que vaut $|a|$? Soit R un réel strictement positif : si $x \in]a-R ; a+R[$, que peut-on dire de $|x-a|$?

Si $|x| < R$, que peut-on déduire pour x ? Et si $|x| > R$?

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

$$|x-1| = |3x-2| ; |5x+1| \leq 4 ; |3x+1| \geq 6.$$

3. Résoudre (en vous appliquant) les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} 2A+B & = 1 \\ -A+3B & = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y & = -1 \\ x-y & = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 4a+3b & = 1 \\ 5a-2b & = -1 \end{cases}$$

Indication : pour cette question, on privilégiera la résolution des systèmes par combinaisons linéaires.

Exercice 7 *Etude de fonction...*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - e^{-x}$.

(1) Démontrer que pour tout réel $x < 0$, $f(x) < 0$.

(2) Démontrer que pour tout réel $x \geq 0$, $0 \leq f(x) < 1$.

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

- (1) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer f' et f'' .
- (2) Déterminer le signe de $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- (3) En déduire le tableau des variations de f' sur $\mathbb{R}$ puis le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- (4) En déduire le sens des variations de f sur $\mathbb{R}$.

Le but de l'exercice suivant est d'apprendre à dériver rapidement certains types de fonctions. Cette méthode est à comprendre, il ne faut pas l'apprendre par coeur. Il faut savoir l'appliquer aux moments voulus pour vous faciliter certains calculs. Elle sera complétée par d'autres exemples dans la prochaine planche de TD.

Exercice 9

Soit P une fonction polynomiale et $k \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = e^{kx}P(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculer la dérivée de f (à l'issue du calcul, on fera apparaître une façon simple de dériver f).
2. Calculer les dérivées des fonctions f , g et h définies ci-dessous en s'inspirant de la méthode mise en place dans la question 1 :

$$f(x) = e^{3x}(x^2 - 2x + 1), \quad g(x) = e^{-x}(3x - 2), \quad h(x) = e^{2x}(x^3 + x - 1).$$

Exercice 10

Montrer que pour tout $x > 0$, $\ln(1 + x) \leq x$