I.U.T d'Aix-Marseille
Département Mesures Physiques

Deuxième année 2022/2023

Mathématiques - Fiche n°2

Exercices supplémentaires sur les séries numériques, les séries de Fourier et les séries entières.

Partie I Séries numériques

Exercice 1

1. Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{n^2}{n!}$.
2. Soit α un nombre réel strictement positif et p un entier relatif. Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{n^p}{\alpha^n}$
3. Soit a un réel strictement positif. Etudier, suivant les valeurs de a, la nature de la série de terme général $u_n = \sqrt{n^4 + 2n + 1} - \sqrt{n^4 + an}$.

Exercice 2

Justifiez l'existence de S puis calculez sa valeur

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{9}{(3n+1)(3n+4)}.$$

Indications : prouver l'existence de S signifie qu'il faut montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{9}{(3n+1)(3n+4)}$ est convergente. Pour calculer la somme, S, on pourra dans un premier temps introduire la fraction F définie par $F(x) = \dfrac{9}{(3x+1)(3x+4)}$, et la décomposer en éléments simples.

Exercice 3 *Une autre façon de montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{n}$ diverge*

a) Montrer, en utilisant la formule des accroissements finis, que pour tout entier $n \geq 1$

$$\frac{1}{n+1} < \ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$$

b) On considère la série de terme général u_n. Pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{1}{n}$ et on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. Déduire de la question a) que pour tout entier $n > 1$,

$$\ln n < S_n < \ln n + 1$$

c) En déduire que la série de terme général u_n est divergente.

Exercice 4

1. On considère les séries à termes positifs suivantes définies par leur terme général

$$u_n = \frac{1}{n^2 + 2n + 1} \quad v_n = \frac{1}{n^2 + 4n + 4} \quad w_n = \frac{2n+3}{(n^2 + 3n + 2)^2}$$

a) Justifier que les trois séries sont convergentes. On notera $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ leur somme respective (on ne demande pas de calculer explicitement $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$).
b) Montrer que $\mathcal{U} - \mathcal{V} = 1$.
c) En déduire que $\mathcal{W} = 1$.

Exercice 5

a) Déterminer la nature des séries suivantes définies par leur terme général

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \quad \text{et} \quad v_n = \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt[3]{n^3-1}$$

b) Soit a un nombre réel strictement positif. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = na^n$ et $v_n = a^n \dfrac{1}{n}$. Déterminer suivant les valeurs de a la nature des séries terme général (u_n) et (v_n).

Partie II Séries de Fourier

Exercice 6 *signal sinusoidal redressé*

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

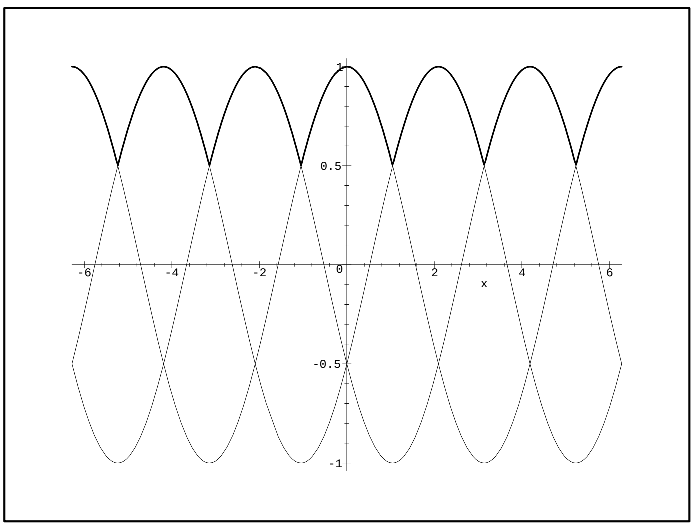
$$g(t) = |\sin t|$$

a) Quelle est la période de la fonction g ? Montrer que g est une fonction paire et représenter graphiquement la fonction g sur $[-3\pi, 3\pi]$.
b) Calculer les coefficients de Fourier de g puis écrire son développement en série de Fourier.
c) Préciser si la série de Fourier de g converge vers $g(x)$ pour tout x.

Exercice 7

On considère la fonction f définie ci-dessous (par exemple un courant triphasé redressé triple alternance). Les trois courbes sont respectivement $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \cos(x - \frac{2\pi}{3})$ et $x \mapsto \cos(x - \frac{4\pi}{3})$. On donne (en gras) la représentation graphique sur $[-2\pi, 2\pi]$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = \sup\left(\cos x, \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right), \cos\left(x - \frac{4\pi}{3}\right)\right)$$



a) Montrer que f est périodique de période $\dfrac{2\pi}{3}$. En déduire que $f(x) = \cos x$ pour $x \in [-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}]$.
b) Calculer les coefficients de Fourier de f.
c) Préciser si la série de Fourier de f converge vers $f(x)$ pour tout x.

Exercice 8

Soit S le signal pair et 1-périodique défini par

$$S(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \left[0, \dfrac{1}{4}\right[\\ 0 & \text{si } t \in \left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right[\end{cases}$$

1. Représenter graphiquement S pour t appartenant à $[-2, 2]$.
2. Calculer la valeur moyenne et l'énergie de S sur une période.
3. Calculer les coefficients de Fourier de S.
4. Représenter le spectre des fréquences de S.

5. On note E_n l'énergie de l'harmonique de rang n. Calculer E_n pour n variant de 1 à 6.
6. Combien d'harmoniques sont nécessaires pour transmettre au moins 60%, 90% et 95% de l'énergie du signal ?

Partie III Séries entières

Exercice 9

1. A partir du développement en série entière de sa dérivée, donnez le développement en série entière sur $]-1,1[$ de $x \mapsto -\ln(1-x)$.
2. On conidère la série entière de terme général $u_n(x) = \dfrac{x^n}{2(n-1)}$ où $n \geq 2$.
   a) Déterminez son rayon de convergence puis faites une étude aux bornes si nécessaire.
   b) Calculez sa somme.

Exercice 10

En s'inspirant des exercices du cours sur les séries entières, trouver sous forme de série entière la solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} xy'' + 2y' + xy = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 11

On considère la fonction f continue sur $\mathbb{R}$ et définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$, et soit g la primitive de f définie sur $\mathbb{R}$ et qui s'annule en 0.

a) Calculer $f(0)$ (en justifiant soigneusement le calcul).
b) Donner le développement en série entière de la fonction sinus puis en déduire celui de f.
c) En déduire le développement en série entière de la fonction g.