I.U.T d'Aix-Marseille
Département Mesures Physiques

Deuxième année 2021/2022

Mathématiques - Fiche n°1

Exercices supplémentaires sur la transformée de Laplace.

Exercice 1

1. Tracez les graphes des fonctions P, Q définies ci-dessous puis calculez leur transformée de Laplace.

$$P(t) = t\mathcal{U}(t) + (-\frac{3}{2}t + \frac{3}{2})\mathcal{U}(t-1) + (\frac{1}{2}t - \frac{3}{2})\mathcal{U}(t-3),\ \ Q(t) = t\mathcal{U}(t) + (1-t)\mathcal{U}(t-1).$$

2. Mêmes questions avec la fonction porte définie par $\Pi(t) = \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1)$.

Exercice 2

On considère les fonctions f_1, f_2, f_3 définies par

$$\begin{array}{l} f_1(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})\ \mathcal{U}(x - \frac{\pi}{4}) \\ f_2(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})\ \mathcal{U}(x) \\ f_3(x) = \sin(x)\ \mathcal{U}(x - \frac{\pi}{4}) \end{array}$$

a) Représenter graphiquement chacune des trois fonctions.
b) Déterminer leur transformée de Laplace.

Les exercices 3 et 4 sont liés

Exercice 3

1. Calculez l'original de $F(p) = \dfrac{1}{10p+1}$.
2. Décomposez en éléments simples la fraction rationnelle $G(p) = \dfrac{1}{p^2(10p+1)}$.
3. En déduire l'original de G.

Exercice 4

On considère la fontion x définie par

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ t & \text{si} \quad 0 \leq t < 10 \\ 0 & \text{si} \quad t \geq 10 \end{cases}$$

1. Représentez graphiquement la fonction x dans un repère orthonormé.
2. On note X sa transformée de Laplace. Montrez que $X(p) = \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1+10p}{p^2}e^{-10p}$.
3. Le signal d'entrée $t \mapsto x(t)$ est envoyé dans un circuit intégré. Il y subit une transformation. Le signal de sortie noté $t \mapsto y(t)$ a pour transformée de Laplace $Y(p) = \dfrac{1}{1+10p}X(p)$. En utilisant l'exercice 1, déterminez le signal y (on prendra soin de bien définir la fonction y sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$, $[0, 10[$ et $[10, +\infty[$).

Exercice 5

Le but de cet exercice est de déterminer $\Pi * \Pi$ sans utiliser le produit de convolution. On rappelle que $\Pi(t) = \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1)$. On note F sa transformée de Laplace. Calculez $F \times F$ et en déduire $\Pi * \Pi$ (on représentera graphiquement les fonctions Π et $\Pi * \Pi$) .

Exercice 6 *Utilisation de la transformée de laplace pour la résolution des systèmes différentiels*

En utilisant la transformation de Laplace, résoudre le système différentiel avec conditions initiales suivant:

$$\left\{\begin{array}{rrcrcr} x'(t) = & x(t) & & & - & z(t) \\ y'(t) = & & & y(t) & + & z(t) \\ z'(t) = & x(t) & + & y(t) & + & z(t) \end{array}\right. \quad \text{avec} \quad \left\{\begin{array}{l} x(0)=0 \\ y(0)=0 \\ z(0)=1 \end{array}\right.$$

Exercice 7

On considère F définie par $F(p) = \dfrac{25}{(p+1)^2(p^2+4)}$.

1. Décomposer F en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'original (dans la transformation de Laplace) de F.
3. Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{\begin{array}{rl} y''+4y & = 25te^{-t}\mathcal{U}(t) \\ y(0) & = 0 \\ y'(0) & = 1 \end{array}\right.$$

Exercice 8 *Exercice de synthèse*

On considère la fontion f définie par

$$f(t) = \left\{\begin{array}{lll} 0 & \text{si} & t < \pi \\ 3\sin t & \text{si} & t \geq \pi \end{array}\right.$$

1. Calculez, F, la transformée de Laplace de f.
2. On considère les fonctions H et G définies par $H(p) = \dfrac{1}{(p^2+1)(p+1)}$ et $G(p) = e^{-p\pi}H(p)$. Déterminez les originaux respectifs de H et G.
3. Résoudre, en utilisant la transformée de Laplace, l'équation différentielle avec condition initiale : $y'(t) + y(t) = f(t)$, $y(0) = 5$.

Exercice 9 *Exercice de synthèse*

On considère la fraction rationnelle suivante : $F(X) = \dfrac{X}{(X+2)(X^2+4)}$.

a) Décomposer F en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

b) Déduire de cette décomposition l'original (dans la transformation de Laplace) de

$$F(p) = \frac{p}{(p+2)(p^2+4)}$$

c) Montrer que l'original de G où $G(p) = e^{-p\frac{\pi}{4}}F(p)$ est la fonction g définie par

$$g(t) = \left\{\begin{array}{ll} -\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}}{4}e^{-2t} + \dfrac{1}{4}\sin 2t - \dfrac{1}{4}\cos 2t & \text{si } t \geq \frac{\pi}{4} \\ 0 & \text{si } t < \frac{\pi}{4} \end{array}\right.$$

d) Retrouver l'original de F en utilisant le produit de convolution.

Exercice 10 *Exercice de synthèse*

Résoudre, en utilisant la transformation de Laplace, le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} y''+3y'+2y = t\mathcal{U}(t) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{array}\right.$$

Exercice 11

On considère la fonction F définie par $F(p) = \dfrac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)}$. Déterminer f l'original de F puis en déduire la transformée de Laplace de la fonction g définie par $g(t) = \dfrac{f(t)}{t}$ si $t > 0$.

Exercice 12 *Application à la résolution des équations différentielles avec conditions initiales : exercice de synthèse*

1. Soit a un nombre réel strictement positif. On considère la fonction $t \mapsto x(t)$ définie par
$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 \leq t < a \\ 0 & \text{si} \quad t \geq a \end{cases}$$
   a) Donner l'expression de la fonction x à l'aide de la fonction échelon unité.
   b) Calculer sa transformée de Laplace.
2. On note F la fonction définie par $F(p) = \dfrac{1}{p(p^2+2p+5)}$, G la fonction définie par $G(p) = e^{-pa}F(p)$ et H la fonction définie par $H(p) = \dfrac{1}{p^2+2p+5}$. Déterminer les originaux respectifs de F, de G et de H.
3. Résoudre **en utilisant la transformée de Laplace** l'équation différentielle (avec conditions initiales) suivante :
$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y & = x(t) \\ y(0) & = 0 \\ y'(0) & = 1 \end{cases}$$

Exercice 13 *Impulsion de Dirac*

Pour tout nombre $\varepsilon > 0$, on considère la fonction

$$d_\varepsilon \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ t \mapsto d_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \\ \dfrac{1}{\varepsilon} & si \quad 0 \leq t < \varepsilon \\ 0 & si \quad t \geq \varepsilon \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement les fonctions d_2, d_1, $d_{\frac{1}{2}}$ et $d_{\frac{1}{3}}$ sur l'intervalle $[-1, 3]$.
2. Que vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} d_\varepsilon(t) \, \mathrm{d}t$.
3. Calculer la transformée de Laplace D_ε de d_ε.
4. Quelle est la limite de $D_\varepsilon(p)$ quand ε tend vers 0 ?