

Mathématiques - Devoir surveillé n°4

Pas de calculatrice. Aucun document n'est autorisé.  
Les portables doivent être éteints et rangés dans vos sacs.

Judi 13 juin 2024 - Durée de l'épreuve 1H40

**Note importante** : la qualité de la rédaction, les justifications et le **soin** apportés à la copie sont pris en compte dans la notation. Toute réponse non justifiée n'est pas prise en compte. **Rendre le sujet avec la copie**

**Questions de cours-Applications directes**

1. Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$  une base de  $E$ . Montrer que tout élément  $u \in E$  s'écrit de manière unique

$$u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

où  $x_i \in \mathbb{R}$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ .

2. Les ensembles suivants sont-ils des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels ? Justifiez soigneusement.

- $E_1 = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } 2x - y + z = -1\}$ .
- $E_2 = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ tels que } \det(A) = 0\}$ .
- $E_3 = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tels que } P(0) = 0\}$ .

3. Donner, **en justifiant soigneusement** le DL à l'ordre 3, de la fonction  $h$  définie par  $h(x) = \ln(1 + \sin x)$ .

**Exercice 1**

Calculer les limites suivantes :

$$I_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{3x^2}$$

$$I_2 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - e^{x-1}}{1 - e^{1-x}}$$

**Exercice 2**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = x\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - x$ .

1) Démontrer (en justifiant soigneusement) que  $f$  peut s'écrire

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \text{ où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

2) Démontrer que la courbe représentative de  $f$  admet une droite asymptote au voisinage de  $+\infty$  dont on précisera l'équation.

3) Etudier la position de la courbe par rapport à son asymptote.

**Exercice 3**

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène

$$y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = 0$$

On appelle  $F$  l'ensemble de ses solutions. Enfin on note  $\mathcal{D}$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

- Résoudre l'équation différentielle et préciser les éléments de l'ensemble  $F$ .
- Démontrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{D}$ .
- Donner, **en justifiant soigneusement**, une base de  $F$  et en déduire sa dimension.

#### Exercice 4

On considère la matrice  $A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrez que la matrice  $A$  est inversible.
2. On considère les matrices colonnes  $X$  et  $B$  définies ci-dessous :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- a) Écrire le système linéaire correspondant à l'égalité matricielle  $AX = B$  (on détaillera les calculs).
- b) Peut-on prévoir le nombre de solutions du système ? (Justifiez soigneusement).
- c) Résoudre le système (par le pivot de Gauss).

**Bonus** Calculer l'inverse de la matrice  $A$ .