I.U.T d'Aix-Marseille
Département Mesures Physiques
MP1
Deuxième semestre 2021/2022

Mathématiques - Devoir surveillé n°4

Pas de calculatrice. Aucun document n'est autorisé.
Les portables doivent être éteints et rangés dans vos sacs.

Lundi 13 juin 2022 - Durée de l'épreuve 1H40

Note importante : la qualité de la rédaction, les justifications et le **soin** apportés à la copie sont pris en compte dans la notation. Toute réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Le barème est donné à titre indicatif. **Rendre le sujet avec la copie**

Partie I (9 points)

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $I = [-1, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x} - \cos x}{x} & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & x = 0. \end{cases}$$

1. Donner le développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction f.
2. Montrer que f est dérivable en 0, en déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point de coordonnées $(0, f(0))$ et étudier la position de la courbe par rapport à sa tangente (justifiez soigneusement). Finaliser l'étude par une représentation graphique. (Appliquez-vous !)

Exercice 2

On considère la fonction h définie au voisinage de $+\infty$ par son développement limité généralisé :

$$h(x) = 2 - x + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(\frac{1}{x})$$

où $\lim\limits_{x \to +\infty} \varepsilon(\frac{1}{x}) = 0$.

a) Démontrez que la courbe représentative de h admet une droite asymptote au voisinage de $+\infty$ dont vous préciserez l'équation.
b) Etudiez la position de la courbe $\mathcal{C}_h$ par rapport à son asymptote au voisinage de $+\infty$. Illustrez par un schéma.
c) Donnez un équivalent de h en $+\infty$ (Justifiez).

Partie II (11 points)

Question de cours

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. On note $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n\}$ une base de E. Démontrez que tout vecteur $\vec{u}$ de E, s'écrit :

$$\vec{u} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_n\vec{v}_n$$

où pour tout entier $1 \leq i \leq n$, $x_i \in \mathbb{R}$ et que cette écriture est unique.

Exercice 1

1. Résoudre (en utilisant la méthode du pivot de Gauss) le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + y - z &= 0 \\ 3x + 3y - 3z &= 0 \\ -x - y + z &= 0 \end{cases}$$

2. On note A la matrice associée au système ci-dessus, que pouvez vous déduire de la résolution du système ci-dessus pour la matrice A ? (Expliquez soigneusement)

Exercice 2

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et

$$\mathcal{P} = \{\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x - 2y - z = 0\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{P}$ est un sous-espace-vectoriel de E.
2. Donner en **justifiant soigneusement** une base de $\mathcal{P}$, déduire la dimension de $\mathcal{P}$.

Exercice 3

Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ? Répondez par V ou F, **en cas de réponse** F **justifiez soigneusement**.

a) $\mathbb{Z}$ (l'ensemble des entiers relatifs),

b) $\mathbb{R}$ (l'ensemble des nombres réels),

c) $E = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ tels que } \det A \neq 0\}$.

d) $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}_+ \right\}$. On rappelle que $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R},\ x \geq 0\}$.