Mathématiques - Devoir surveillé n°3

Pas de calculatrice. Aucun document n'est autorisé.
Les portables doivent être éteints et rangés dans vos sacs.

Lundi 28 mars 2022 - Durée de l'épreuve 1H30

Note importante : la qualité de la rédaction, les justifications et le **soin** apportés à la copie sont pris en compte dans la notation. Toute réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Le barème est donné à titre indicatif. **Rendre le sujet avec la copie**

Question de cours (4 points)

1. Donnez les développements limités en 0 à l'ordre 2 des fonctions : $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \operatorname{sh}(x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$. *Aucune justification n'est demandée.*
2. On considère $\mathcal{E}$ l'espace muni du repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
   a) Donnez la **définition** du produit vectoriel de deux vecteurs.
   b) Donnez la **définition** du produit mixte de trois vecteurs.
   c) Enoncez la propriété du cours qui permet de caractériser trois vecteurs coplanaires.

Exercice 1 (5 points)

1. Résoudre l'équation différentielle (E) $y''(x) + 4y(x) = e^{-x} \sin x$.
2. Parmi les solutions de (E), déterminer l'unique solution g définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $g(0) = \dfrac{1}{10}$ et $g'(0) = \dfrac{1}{10}$.

Exercice 2 (4 points)

Le plan $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et $\mathcal{E}$ l'espace est muni du repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. **Les questions 1 et 2 sont indépendantes**.

1. On considère dans le plan P, le point A de coordonnées cartésiennes $(1, -2)$ et $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $(1, -1)$, soit $\mathcal{D}$ la droite définie par le couple $(A, \vec{u})$. Enfin, soit le cercle $\mathcal{C}$ de centre B de coordonnées $(-1, -1)$ et de rayon $R = 1$. Déterminez le ou les points d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du cercle $\mathcal{C}$.
2. On considère dans l'espace $\mathcal{E}$, les points A de coordonnées $(1, 0, 1)$, B de coordonnées $(1, -3, 2)$ et C de coordonnées $(-1, 1, 0)$.
   a) Vérifiez que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   b) Donnez une équation cartésienne du plan $\mathcal{Q}$ défini par les points A, B et C.
   c) En déduire une représentation paramétrique du plan $\mathcal{Q}$.

Exercice 3 (4 points)

On considère la fonction f définie en 0 et admettant comme développement limité d'ordre 4 en 0, le développement suivant : $f(x) = 2x + x^3 + 3x^4 + x^4\varepsilon(x)$ où $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

1. Montrez que f est dérivable en 0 et donnez l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point de coordonnées $(0, f(0))$.
2. En déduire la position de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage de 0 (on justifiera soigneusement et on fera ensuite un petit dessin).
3. Calculez $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{5x}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 2x}{3x^2}$.

Exercice 4 (4 points)

1. Calculez les intégrale suivantes : $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^3 x \, \mathrm{d}x$, $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^{2x}} \, \mathrm{d}x$.
2. Démontrez que $J = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(t) \, \mathrm{d}t = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) \, \mathrm{d}t$ puis calculez la valeur de J.