I.U.T d'Aix-Marseille
Département Mesures Physiques
MP1

Premier semestre 2023/2024

Mathématiques - Devoir surveillé n°2a

Pas de calculatrice. Aucun document n'est autorisé.
Les téléphones portables sont éteints et rangés dans les sacs.

Lundi 15 janvier 2024- Durée de l'épreuve 1H30.

Note importante : la qualité de la rédaction et le soin apporté à la copie seront pris en compte. **Chaque réponse doit être soigneusement justifiée**. Le barème est donné à titre indicatif et il peut être modifié.

Nom/Prénom/Groupe :

La partie I est à traiter **entièrement sur le sujet**. La partie II sera traitée sur la copie double distribuée.
Partie I (8 points)

Questions de cours-Applications directes du cours

1) Démontrez les deux formules de linéarisation suivantes :

$\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$ et $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$.

2) Rappeler la définition de la fonction ch et de la fonction sh. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.

3) Calculez $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sh}(x) - \frac{e^x}{2}$. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de la fonction sh au voisinage de $+\infty$? (expliquer soigneusement).

4) Citez **soigneusement** le théorème de dérivation d'une fonction composée.

5) Pour chacune des fonctions suivantes, donnez une primitive (sans justification).

$$\forall x > 0,\ f(x) = \frac{1}{x^4},\ F(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1}{1+x^2},\ G(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \operatorname{sh}(x),\ H(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ l(x) = 3\sin(2x + \frac{\pi}{6}),\ L(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

6) Rappeler toutes les propriétés (que vous connaissez) de la fonction **arccosinus** puis la représenter graphiquement dans un repère orthonormé.

Partie II (12 points) la partie II est à traiter sur la feuille double distribuée.

Exercice 1

Les questions suivantes sont indépendantes

1. Donnez l'écriture exponentielle du nombre complexe $z = -6 + i$: on exprimera l'argument de z en utilisant la fonction arctan. Justifiez **soigneusement**.

2. Soit f définie par $f(x) = \sqrt{3}\cos(3x) + \sin(3x)$. Transformer l'écriture de f sous la forme $f(x) = A\cos(\omega x - \varphi)$.

3. Linéarisez $\cos^4 x$.

Exercice 2

1. Calculez $I_1 = \displaystyle\int_0^1 (x+3)^2 \mathrm{d}x$.
2. Calculez $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(2x)\sin(x)\ \mathrm{d}x$.
3. Calculez $I_3 = \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-x}(\cos x + \sin x)\ \mathrm{d}x$.
4. Calculez $I_4 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4(x)\ \mathrm{d}x$.

Exercice 3

On considère les fonctions u et f définies par $u(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ et $f(x) = 2\mathrm{arctan}(u(x))$.

a) Déterminer, **en justifiant soigneusement**, le domaine de définition de la fonction u puis son domaine de dérivabilité. Calculer sa dérivée.

b) Déterminer, **en justifiant soigneusement**, le domaine de définition I de la fonction f puis son domaine de dérivabilité J. Calculer sa dérivée.

c) En déduire que pour tout $x \in I$, $f(x) = \arccos(x)$.

Bonus Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \arccos(x)\mathrm{d}x$.