I.U.T d'Aix-Marseille
Département Mesures Physiques
MP1 Premier semestre 2023/2024

Mathématiques - Devoir surveillé n°1a

Pas de calculatrice. Aucun document n'est autorisé. Téléphones éteints et rangés dans vos sacs.

Lundi 20 novembre 2023 - Durée de l'épreuve 1H45

Note importante : la qualité de la rédaction sera prise en compte. Chaque réponse doit être soigneusement justifiée. Le barème est donné à titre indicatif. **Rendre le sujet avec la copie** Tous les calculs doivent apparaître sur votre copie.

Questions de cours- Applications directes (8 points)

1. Rappeler toutes les propriétés (que vous connaissez) de la fonction cosinus puis la représenter graphiquement sur un intervalle de longueur la période.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$, $z = 3 + i$. Donner l'écriture exponentielle de z puis calculer $z\overline{z}$, $z + \overline{z}$ et $z - \overline{z}$.
3. Donner la définition d'une fonction continue en x_0. Donner **deux raisons différentes** pour lesquelles une fonction g n'est pas continue en un point x_0. Illustrer chaque raison par un exemple précis.
4. Quand dit-on que deux fonctions sont équivalentes en x_0 (donnez la définition) ? Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x^3 - 4x + 1}{3x^4 + 2}$. Donnez un équivalent de f en $+\infty$ et en déduire $\lim\limits_{+\infty} f$.

Exercice 1 *Les questions suivantes sont indépendantes.*

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $Z^4 = -16i$.

2. On considère $z_1 = 4[\cos(\frac{\pi}{12}) - i\sin(\frac{\pi}{12})]$ et $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.
   a) Donnez l'écriture exponentielle de z_1 et z_2.
   b) Donnez l'écriture algébrique de $\beta = \dfrac{z_1}{z_2}$ et $\gamma = z_1\overline{z_2}$.

3. Par un raisonnement géométrique, expliquer soigneusement et représenter graphiquement dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z satisfait les conditions suivantes :

$$1 \leq |z| \leq 3 \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}$$

Exercice 2 *Les questions 1 et 2 sont indépendantes.*

1. Déterminez, en justifiant soigneusement, le domaine de définition de la fonction h définie par

$$h(x) = \ln\left[(2x+1)(x-5)\right]$$

2. Soit f la fonction sinusoidale définie par $f(x) = -\cos(3x) + \sin(3x)$.
   a) Mettre f sous la forme $f(x) = A\cos(\omega x - \varphi)$. Que représente l'amplitude A pour la fonction f, précisez sa pulsation et sa période T ?
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $(E) \quad f(x) = 1$.
   c) Quelles sont les solutions de (E) dans $]-\pi, \pi]$?

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(F) \quad z^2 + 2(1+i)z - 5(1+2i) = 0$.

Indication : $\sqrt{20^2 + 48^2} = 52$.

Exercice 4

Résoudre l'équation (E) $x + 1 = \sqrt{-x^2 - 2x + 3}$.

Attention : ceci est une équation avec contrainte, avant de la résoudre, il faut au préalable donner le domaine de définition de l'équation. A justifier soigneusement.