I.U.T d'Aix-Marseille
Département Mesures Physiques
MP1

Premier semestre 2022/2023

Mathématiques - Devoir surveillé n^{o}1a

Pas de calculatrice. Aucun document n'est autorisé. Téléphones éteints et rangés dans vos sacs.

Lundi 07 novembre 2022 - Durée de l'épreuve 1H45

Note importante : la qualité de la rédaction sera prise en compte. Chaque réponse doit être soigneusement justifiée. Le barème est donné à titre indicatif. **Rendre le sujet avec la copie** Tous les calculs doivent apparaître sur votre copie.

Nom/Prénom :

Questions de cours- Applications directes (8 points)

1. Donnez la définition d'une fonction impaire sur $\mathbb{R}$.
2. Rappeler toutes les propriétés (que vous connaissez) de la fonction sinus puis la représenter graphiquement sur un intervalle de longueur la période.
3. On donne les nombres complexes suivants, représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé leurs images et donner leur écriture exponentielle (sans justifier).

$$z_1 = 2i,\ z_2 = -3i,\ z_3 = -5$$

4. Donner la définition d'une fonction continue en x_0. Donner **deux raisons différentes** pour lesquelles une fonction g n'est pas continue en un point x_0. Illustrer chaque raison par un exemple précis.
5. Déterminer, en justifiant soigneusement, le domaine de définition, de la fonction f définie par

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{x-4}\right)$$

Exercice 1 *Les questions suivantes sont indépendantes.*

1. Déterminez les nombres réels A et B solutions de

$$A + 2iB = \frac{50}{(1-2i)^2}.$$

2. On considère les trois nombres complexes

$$z_1 = 1-i,\ z_2 = \cos(\frac{\pi}{5}) + i\sin(\frac{\pi}{5}),\ z_3 = \sqrt{3} - i$$

   a) Donnez, en justifiant, une écriture exponentielle des trois nombres complexes ci-dessus.
   b) Montrez que $z_1z_2z_3 = 2\sqrt{2}\left[\cos(\frac{13\pi}{60}) - i\sin(\frac{13\pi}{60})\right]$.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $Z^3 = 27i$.

Exercice 2 *Les questions 1 et 2 sont indépendantes.*

1.
   a) Linéariser $\cos^3 x$.
   b) Donner une primitive de la fonction h définie par $h(x) = \cos^3 x$.
2. Soit f la fonction sinusoidale définie par $f(x) = \cos(2x) - \sin(2x)$.
   a) Mettre f sous la forme $f(x) = A\cos(\omega x - \varphi)$. Que représente l'amplitude A pour la fonction f, précisez sa pulsation et sa période T ?
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $(E)\ \ f(x) = -1$.
   c) Quelles sont les solutions de (E) dans $]-\pi,\pi]$?

Exercice 3

Résoudre l'équation $\ln(3x+1)+\ln(x+1)=0$.

Attention : ceci est une équation avec contrainte, avant de la résoudre, il faut au préalable donner le domaine de définition de l'équation.

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(F)\quad iz^2+(1-5i)z+6i-2=0$

Bonus

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+2x-5$. Sans calculer les racines de f, démontrer que f admet au moins une racine dans l'intervalle $]0,2[$. On citera soigneusement le théorème utilisé pour répondre à cette question.