

Mathématiques - Devoir surveillé n°1a

Pas de calculatrice. Aucun document n'est autorisé. Téléphones éteints et rangés dans vos sacs.

Lundi 25 octobre 2021 - Durée de l'épreuve 1H30

**Note importante** : la qualité de la rédaction sera prise en compte. Chaque réponse doit être soigneusement justifiée. Le barème est donné à titre indicatif. **Rendre le sujet avec la copie**

Nom/Prénom :

**Questions de cours- Applications directes** (7 points)

1. Donnez la définition d'une fonction  $T$ -périodique sur  $\mathbb{R}$ .
2. Rappeler toutes les propriétés (que vous connaissez) de la fonction cosinus puis la représenter graphiquement sur un intervalle de longueur la période.
3. Soit  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$ , calculez sa dérivée et donnez une primitive (aucune justification n'est demandée).

$$f(x) = \cos(3x) + 2 \sin(3x)$$

4. Quand dit-on que deux fonctions sont équivalentes en  $x_0$  (donnez la définition) ? Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{4x^2 + 2x + 1}{x(2x + 3)}$ . Donnez un équivalent de  $f$  en  $+\infty$  et en déduire  $\lim_{+\infty} f$ .
5. Déterminez, en justifiant soigneusement, le domaine de définition, de la fonction  $h$  définie par

$$h(x) = \sqrt{\frac{3x + 1}{x - 3}}$$

**Exercice 1** (4 points) *Les questions suivantes sont indépendantes.*

1. Calculez  $\alpha = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{23}$ .
2. Donnez l'écriture algébrique de  $\beta = \frac{\sqrt{2}[\cos(\frac{\pi}{12}) + i \sin(\frac{\pi}{12})]}{1+i}$ .
3. Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $Z^3 = -8i$ .

**Exercice 2** (4 points) *Les questions 1 et 2 sont indépendantes.*

1.
  - a) Linéariser  $\cos^3 x$ .
  - b) En déduire une primitive de la fonction  $g$  définie par  $g(x) = \cos^3(x)$ .
2. Soit  $f$  la fonction sinusoidale définie par  $f(x) = -\cos(2x) + \sin(2x)$ .
  - a) Mettre  $f$  sous la forme  $f(x) = A \cos(\omega x - \varphi)$ . Que représente l'amplitude  $A$  pour la fonction  $f$ , précisez sa pulsation et sa période  $T$  ?
  - b) Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , l'équation (E)  $f(x) = 1$ .
  - c) Quelles sont les solutions de (E) dans  $[0, 2\pi[$  ?

**Exercice 3** (2 points)

Résoudre l'équation  $x + 2 = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$ .

**Attention** : ceci est une équation avec contraintes, avant de la résoudre il faut au préalable donner le domaine de définition de l'équation.

**Exercice 4** (3 points)

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (F)  $z^2 - z(4 + 4i) + 6i = 0$

**Bonus** Le bonus ne sera pris en compte que si au moins trois des cinq questions de cours sont correctement traitées.

Soit  $x \in ]0, \pi[$ , donnez l'écriture exponentielle de  $z = 1 + e^{-ix}$ .