I.U.T d'Aix-Marseille Deuxième année 2022/2023
Département Mesures Physiques

Mathématiques - Correction Devoir n°2

I. Complétez ou répondez aux questions posées (les questions sont indépendantes) :

1) La série de terme général u_n est **absolument convergente** si la série de terme général $|u_n|$ converge.

2) Une série numérique **absolument convergente** est convergente.

3) Une série **alternée** est une série dont le terme général u_n est de la forme, $u_n = (-1)^n v_n$ où (v_n) est une suite de signe constant.

4) Donnez l'exemple d'une série alternée absolument convergente puis l'exemple d'une série alternée qui est convergente mais qui n'est pas absolument convergente (en justifiant).

- Posons $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^3}$, on reconnait le terme général d'une série alternée d'après la question 3). Par ailleurs, pour tout $n \geq 1$, $|u_n| = \dfrac{1}{n^3}$ qui est le terme général d'une série de Riemann avec $\alpha = 3 > 1$, donc la série de terme général $|u_n|$ converge ; ce qui signifie que la série Σu_n est absolument convergente.
- Posons $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, on reconnait le terme général d'une série alternée d'après la question 3). Par ailleurs, pour tout $n \geq 1$, $|u_n| = \dfrac{1}{n}$ qui est le terme général d'une série de Riemann avec $\alpha = 1$, donc la série de terme général $|u_n|$ diverge ; ce qui signifie que la série Σu_n n'est pas absolument convergente.
- Par ailleurs : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} = (-1)^n v_n$ avec pour tout $n \geq 1$, $v_n = \dfrac{1}{n} > 0$. La suite (v_n) est décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$. On applique le critère des séries alternées et on peut déduire que la série de terme général u_n est convergente.

Exercice . Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{n} - \ln(1 + \dfrac{1}{n})$.

a) Montrez que pour tout $n \geq 1$, $u_n > 0$.
On pose $f(x) = x - \ln(1 + x)$. La fonction f est définie et dérivable sur $]-1, +\infty[$, donc sur $[0, +\infty[$.
Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x} > 0$, donc f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$; on déduit que pour tout $x > 0$, $f(x) > f(0)$; or $f(0) = 0$ donc pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$.

Or pour tout $n \geq 1$, $u_n = f(\frac{1}{n})$ donc $u_n > 0$.

b) Montrez que la série de terme général u_n est convergente.

On rappelle que

$$\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + u^2 \varepsilon(u) \quad \text{où} \quad \lim_{u \to 0} \varepsilon(u) = 0$$

Lorsque $n \to +\infty$, $u = \frac{1}{n}$ tend vers 0 : on peut donc déduire un DL généralisé en $+\infty$ de u_n :

$$\ln(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon(\frac{1}{n}) \quad \text{où} \quad \lim_{n \to +\infty} \varepsilon(\frac{1}{n}) = 0$$

$$u_n = \frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon(\frac{1}{n})\right) = \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon(\frac{1}{n}) \text{ où } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon(\frac{1}{n}) = 0$$

On déduit que $u_n > 0$ pour tout $n \geq 1$ et

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

D'après le critère 2, les séries Σu_n et $\Sigma \frac{1}{2n^2}$ sont de même nature. Or la série de terme général $v_n = \frac{1}{2n^2}$ est une série de Riemann avec $\alpha = 2 > 0$, elle est donc convergente. On déduit que la série de terme général u_n est convergente.