Mathématiques - Devoir n°2

Correction

I. Complétez (les questions sont indépendantes) :

1) Soit $G = \mathcal{L}(g)$ et $F = \mathcal{L}(f)$. On suppose que

a) $F(p) = G(p-1)$. Quel lien existe-t-il entre f et g ?
b) $F(p) = e^{-p}G(p)$. Quel lien existe-t-il entre f et g ?

a) Si $F(p) = G(p-1)$, on note une translation de $a = 1$ dans le domaine de Laplace, d'après le cours, l'original de F, f vérifie :

$$f(t) = e^t g(t)$$

b) Si $F(p) = e^{-p}G(p)$, d'après le théorème du retard, l'original de F, noté f, est en retard de 1 sur l'original de G soit g, donc

$$f(t) = g(t-1)$$

2) Soit g définie par $g(t) = t^2 f(t)$, on pose $F = \mathcal{L}(f)$ et $G = \mathcal{L}(g)$ alors d'après la propriété du cours, $G(p) = (-1)^2 F''(p) = F''(p)$.

3) $F = \mathcal{L}(f)$ et $F_2 = \mathcal{L}(f'')$. Alors

$$F_2(p) = p^2 F(p) - pf(0^+) - f'(0^+)$$

(propriété du cours sur la dérivation dans le domaine du temps).

4) Soit $F = F_1 \times F_2$ où $F_1 = \mathcal{L}(f_1)$ et $F_2 = \mathcal{L}(f_2)$. Que vaut l'original de F ?

Ici on doit appliquer le produit de convolution.
D'après le théorème sur la convolution, l'original de F, à savoir f vérifie $f = f_1 * f_2$. Pour tout $t \geq 0$,

$$f(t) = \int_0^t f_1(u) f_2(t-u)\ \mathrm{d}u$$

Application : déterminez l'original de F définie par $F(p) = \dfrac{1}{(p^2+4)^2}$.

On remarque que $F(p) = \dfrac{1}{p^2+4} \times \dfrac{1}{p^2+4}$

On pose $F_1(p) = F_2(p) = \dfrac{1}{p^2+4} = \mathcal{L}\big(\dfrac{1}{2}\sin(2t)\mathcal{U}(t)\big)$. On est dans le cas où $f_1(t) = f_2(t) = \dfrac{1}{2}\sin(2t)\mathcal{U}(t)$.

D'après le théorème sur la convolution, l'original de F, à savoir f vérifie $f = f_1 * f_2$. Pour tout $t \geq 0$,

$$f(t) = \int_0^t f_1(u) f_2(t-u)\ \mathrm{d}u = \frac{1}{4}\int_0^t \sin(2u)\sin[2(t-u)]\ \mathrm{d}u$$

On ne sait pas intégrer directement un produit de sinus : on doit donc linéariser (traité en MP1 cours et TD Intégration).

On rappelle que

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$$

Pour tout $t \geq 0$,

$$f(t) = \frac{1}{8}\int_0^t [\cos(4u-2t) - \cos(2t)]\ \mathrm{d}u = \frac{1}{8}\int_0^t \cos(4u-2t)\ \mathrm{d}u - \frac{1}{8}\cos(2t)\int_0^t \mathrm{d}u$$

$$f(t) = \frac{1}{8}\left[\frac{\sin(4u-2t)}{4}\right]_0^t - \frac{1}{8}t\cos(2t) = \frac{1}{8}\left(\frac{\sin(2t)}{4} - \frac{\sin(-2t)}{4}\right) - \frac{1}{8}t\cos(2t)$$

$$f(t) = \frac{1}{8}\left(\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{\sin(2t)}{4}\right) - \frac{1}{8}t\cos(2t)$$

Finalement :

$$f(t) = \left(\frac{1}{16}\sin(2t) - \frac{1}{8}t\cos(2t)\right)\mathcal{U}(t)$$

II. Exercice.
On considère g la fonction 2-périodique sur $\mathbb{R}_+$, définie de la façon suivante

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \leq t < 1 \\ -t+2 & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

Ici on a une fonction périodique de période $T = 2$ sur $\mathbb{R}_+$. Pour la représentation graphique, j'espère que vous n'avez pas de souci.
2. Déterminez sa transformée de Laplace.
On doit utiliser le théorème du cours (Transformée de Laplace des fonctions périodiques), si on pose $G = \mathcal{L}(g)$, on sait que

$$G(p) = \frac{\int_0^2 g(t)e^{-pt}\ \mathrm{d}t}{1-e^{-2p}}$$

.
On va d'abord calculer le numérateur :

$$\int_0^2 g(t)e^{-pt}\ \mathrm{d}t = \int_0^1 g(t)e^{-pt}\ \mathrm{d}t + \int_1^2 g(t)e^{-pt}\ \mathrm{d}t$$

On doit utiliser la relation de Chasles car la fonction g n'a pas la même expression sur l'intervalle $[0,1[$ et sur $[1,2[$. On va utiliser une IPP pour le calcul de chaque intégrale :

$$\int_0^2 g(t)e^{-pt}\ \mathrm{d}t = \int_0^1 te^{-pt}\ \mathrm{d}t + \int_1^2 (-t+2)e^{-pt}\ \mathrm{d}t$$

$$\int_0^1 te^{-pt}\ \mathrm{d}t = \left[-t\frac{e^{-pt}}{p}\right]_0^1 + \frac{1}{p}\int_0^1 e^{-pt}\ \mathrm{d}t = -\frac{e^{-p}}{p} + \frac{1}{p}\left[-\frac{e^{-pt}}{p}\right]_0^1 = -\frac{e^{-p}}{p} - \frac{e^{-p}}{p^2} + \frac{1}{p^2}.$$

$$\int_1^2 (-t+2)e^{-pt}\ \mathrm{d}t = \left[-(-t+2)\frac{e^{-pt}}{p}\right]_1^2 - \frac{1}{p}\int_1^2 e^{-pt}\ \mathrm{d}t = \frac{e^{-p}}{p} - \frac{1}{p}\left[-\frac{e^{-pt}}{p}\right]_1^2 = \frac{e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p^2}.$$

Finalement

$$\int_0^2 g(t)e^{-pt}\ \mathrm{d}t = -\frac{e^{-p}}{p} - \frac{e^{-p}}{p^2} + \frac{1}{p^2} + \frac{e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p^2} = \frac{1}{p^2} - 2\frac{e^{-p}}{p^2} + \frac{e^{-2p}}{p^2} = \frac{(1-e^{-p})^2}{p^2}.$$

On obtient

$$G(p) = \frac{\int_0^2 g(t)e^{-pt}\ \mathrm{d}t}{1-e^{-2p}} = \frac{(1-e^{-p})^2}{p^2(1-e^{-2p})} = \frac{(1-e^{-p})^2}{p^2(1-e^{-p})(1+e^{-p})} = \frac{1-e^{-p}}{p^2(1+e^{-p})}$$

.