I.U.T d'Aix-Marseille Deuxième année 2022/2023
Département Mesures Physiques

Mathématiques - Correction du Devoir n°1

Nom et prénom :

I. Complétez ou répondez aux questions posées (les questions sont indépendantes) :

1) Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$.

   a) La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

   b) La série de terme général u_n est divergente (série de Riemann avec $\alpha = 1$)

2) Complétez le théorème suivant :
Si la série de terme général u_n est convergente *alors la suite (u_n) converge vers* 0.

Ce théorème donne une condition **nécessaire** pour que la série de terme général (u_n) soit convergente.

Si la limite de la suite (u_n) est égale à 0, puis-je conclure que la série de terme général u_n est convergente ? NON car la condition est nécessaire et non suffisante. Par exemple si on pose $u_n = \dfrac{1}{n}$, on a rappelé (question 1 ci-dessus) que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et pourtant la série de terme général u_n est divergente.

Si la limite de la suite (u_n) est différente de 0, puis-je conclure que la série de terme général u_n est divergente ? OUI car la condition est nécessaire, si elle n'est pas satisfaite, la série diverge.

3) Complétez les critères ou propriétés qui suivent :

a) Soit (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels positifs telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang. Alors

- Si la série de terme général v_n converge, alors la série de terme général u_n converge.
- Si la série de terme général u_n diverge alors la série de terme général v_n diverge.

Dans quels cas, ce critère ne permet pas de conclure ? On ne peut pas conclure dans les deux cas suivants

- Si la série de terme général u_n converge.
- Si la série de terme général v_n diverge.

b) Soit (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels positifs telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$. Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

c) Soit (u_n) une suite de nombres réels positifs, on pose $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ (en supposant qu'elle existe), $0 \leq L \leq +\infty$. Alors

- Si $L < 1$, la série $\sum u_n$ converge.
- Si $L > 1$, la série $\sum u_n$ diverge.
- Si $L = 1$ on ne peut pas conclure avec cette règle.

d) Donnez un exemple (de votre choix) pour illustrer l'utilisation de l'une de ces trois règles a), b) ou c) ci-dessus (en justifiant soigneusement).
Étudions la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{2n}{n^3+1}$$

$u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2}$.

D'après le critère 2 du cours (ou b) ci-dessus), les séries $\sum u_n$ et $\sum \frac{2}{n^2}$ sont de même nature. Or la série $\sum \frac{2}{n^2}$ est convergente (série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$) donc la série de terme général u_n est convergente.

II. Subtilités de langage. Les phrases suivantes sont-elles correctes ? Si ce n'est pas le cas, corrigez-les (attention s'il apparait un mot en gras dans la phrase, ce mot en gras doit figurer dans la correction éventuelle).

1) On considère la **série** (u_n). On considère la **série** de terme général u_n.

2) $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est la somme de la série. $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est la suite des sommes partielles associée à la suite (u_n).

3) $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est une somme finie.

4) $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est la suite des sommes partielles associée à la suite u_n. $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est la somme de la série de terme général u_n ($S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} S_n$).

5) $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est la somme de la série de terme général u_n.

III. Exercice. Soit $a > 0$. Etudiez la nature de la série de terme général $u_n = \frac{a^n}{n!}$. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{a^n}{n!} > 0$. Calculons

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \frac{a^{n+1} \times n!}{a^n \times (n+1)!} = \frac{a}{n+1}$$

On déduit, sachant que $a > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{a}{n+1} = 0 < 1$$

D'après la règle de D'Alembert, rappelée ci-dessus question 3c), la série de terme général u_n est convergente.

Si la série de terme général u_n est convergente, son terme général tend vers 0 (théorème du cours rappelé ci-dessus, question 2), on déduit donc que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

Cet exercice est intéressant car il n'est pas simple de calculer la limite de la suite (u_n) directement ; ici on montre d'abord que la série est convergente et on peut en déduire la limite de la suite (u_n).