Annexe B

Rappels sur les nombres complexes

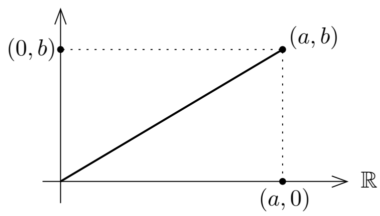
1 Introduction

L'histoire de l'algèbre s'est longtemps confondue avec l'histoire de la résolution des équations. L'une des oeuvres fondatrices, par sa démarche, étant le traité *Kitab al-jabr w'al-muqabalah* (Livre de la remise en place et de la simplification) dû au mathématicien arabe du neuvième siècle *Al Khwarizmi*, le terme *al-jabr* a par la suite donné son nom à cette discipline.

Sous l'influence des traductions des oeuvres arabes, les théories de résolution des équations du troisième degré se développèrent ensuite particulièrement dans l'Italie du seizième siècle. Vers 1530-1545, de nombreux mathématiciens (parmi lesquels *del Ferro* et *Tartaglia*) s'intéressaient à la façon de résoudre *les* équations du troisième degré $x^3 = px + q$, $x^3 + q = px$ ou encore $x^3 + px = q$ avec p et q positifs. Notons que l'usage des nombres négatifs n'étant à l'époque pas encore naturel, ces équations n'étaient alors pas *les mêmes*. En 1545, *Cardan* publia la résolution du cas général en évitant de s'attarder sur la manipulation des racines carrés de quantités négatives. Vers 1560 (mais les travaux ne sont publié qu'en 1572), *Bombelli* osa alors considérer des opérations sur la racine carrée d'un nombre négatif (ce qui rendit les formules de Cardan valables pour toute équation de degré 3) et s'intéressa donc aux nombres de la forme $a + b\sqrt{-1}$ où a et b sont deux nombres réels.

Dans le but de « proposer » des solutions à des équations qui n'en avaient pas *a priori*, les mathématiciens ont progressivement introduit les fractions, les nombres négatifs ou encore certains nombres irrationnels. L'étape franchie dans l'Italie de la Rennaissance consiste donc à introduire des nombres *imaginaires* (le terme est dû à *Descartes* et date de 1637) pour résoudre des équations polynômiales (en fait on peut alors résoudre toutes les équations polynômiales, c'est le théorème d'*Alembert-Gauss*). La notation i pour désigner une solution de l'équation $x^2 + 1 = 0$ est, quant à elle, due à *Euler* et date de 1777. Il convient néanmoins d'avoir à l'esprit que la généralisation de l'usage des nombres complexes ne fut que très lente et dû attendre des fondements rigoureux avec notamment les travaux de *Hamilton*, vers 1830, dont nous précisons les grandes idées ci-dessous.

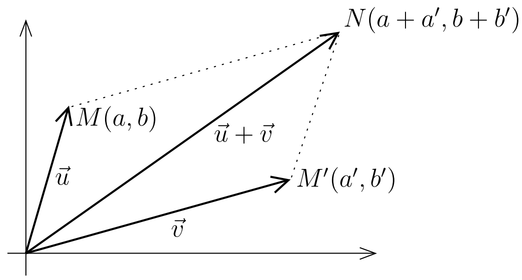
Une idée naturelle en mathématiques lorsqu'on souhaite résoudre une équation qui semble ne pas avoir de solution, consiste à « agrandir » l'ensemble de nombres que l'on considère. On cherche donc à trouver un ensemble contenant l'ensemble des nombres réels or il est usuel de représenter cet ensemble sous la forme d'une droite et de considérer qu'une droite est une partie du plan.



Un nombre réel a se repère donc dans le plan sous la forme d'un couple $(a,0)$. Les opérations usuelles sur $\mathbb{R}$ sont l'addition et la multiplication qui ont comme propriétés l'associativité et la commutativité ainsi que la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ; on souhaite définir sur l'ensemble des couples de $\mathbb{R}^2$ une addition $\oplus$ et une multiplication $\otimes$ qui conservent ces propriétés et qui prolongent les opérations de $\mathbb{R}$. Par exemple, si a et a' sont des réels, on doit avoir

$$(a,0)\oplus(a',0)=(a+a',0) \quad \text{et} \quad (a,0)\otimes(a',0)=(aa',0).$$

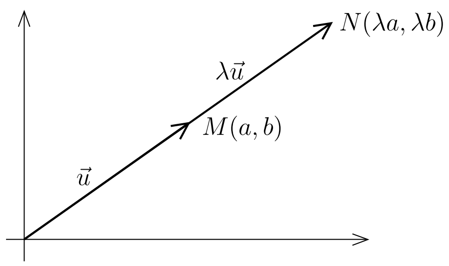
Intuitivement, deux couples (a,b) et (a',b') correspondent à des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ (où (a,b) et (a',b') sont les coordonnées de M et M') et le vecteur somme est $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{ON}$ où les coordonnées de N sont $(a+a',b+b')$.



On définit donc la somme de deux couples par

$$\boxed{(a,b)\oplus(a',b')=(a+a',b+b').}$$

De même, si $\lambda\in\mathbb{R}$ et M a pour coordonnées (a,b) alors on a $\lambda\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}$ où N a pour coordonnées $(\lambda a,\lambda b)$.



On pose donc $(\lambda,0)\otimes(a,b)=(\lambda a,\lambda b)$; en particulier, on a donc $(0,b)=(b,0)\otimes(0,1)$.

On souhaite que la loi $\otimes$ soit distributive par rapport à la loi $\oplus$, de sorte que

$$\begin{aligned}(a,b)\otimes(a',b') &= \big[(a,0)\oplus(0,b)\big]\otimes\big[(a',0)\oplus(0,b')\big]\\ &= \big[(a,0)\otimes(a',0)\big]\oplus\big[(a,0)\otimes(0,b')\big]\oplus\big[(0,b)\otimes(a',0)\big]\oplus\big[(0,b)\otimes(0,b')\big]\\ &= (aa',0)\oplus(0,ab')\oplus(0,a'b)\oplus\Big[\big[(b,0)\otimes(0,1)\big]\otimes\big[(b',0)\otimes(0,1)\big]\Big]\\ &= (aa',ab'+a'b)\oplus\Big[(bb',0)\otimes\big[(0,1)\otimes(0,1)\big]\Big].\end{aligned}$$

Il reste donc à connaître le produit $(0,1) \otimes (0,1)$. Le but initial étant de savoir résoudre les équations polynômiales qui n'ont pas de solution dans $\mathbb{R}$, notamment $x^2 + 1 = 0$, on souhaite obtenir le réel -1 sous la forme d'un carré. Il est donc naturel de souhaiter que $(0,1) \otimes (0,1) = (-1,0)$. Si c'est le cas alors on a en poursuivant le calcul ci-dessus

$$\begin{aligned}(a,b) \otimes (a',b') &= (aa', ab' + a'b) \oplus \big[(bb',0) \otimes (-1,0)\big]\\ &= (aa', ab' + a'b) \oplus (-bb',0)\\ &= (aa' - bb', ab' + a'b).\end{aligned}$$

On définit donc la multiplication de deux couples par

$$\boxed{(a,b) \otimes (a',b') = (aa' - bb', ab' + a'b).}$$

Si on note $\vec{1}$ un vecteur unitaire de l'axe des abcisses et $\vec{j}$ un vecteur unitaire de l'axe des ordonnées alors tout couple (a,b) s'identifie naturellement avec le vecteur $a\vec{1} + b\vec{j}$. Pour simplifier les notations, le couple (a,b) est noté $a + jb$.

La notation j correspond donc au couple $(0,1)$ et on a donc $j^2 = -1$. Notons que la notation usuelle pour cet élément est i (et la notation j est en général utilisée pour un autre nombre) mais l'usage en physique veut que l'on préserve la lettre i pour désigner l'itensité du courant électrique.

2 L'ensemble des nombres complexes

Le paragraphe précédent n'a pour objectif que de donner un fondement rigoureux aux définitions suivantes :

2.1 Définition

On appelle *ensemble des nombres complexes*, et on note $\mathbb{C}$, l'ensemble défini par les conditions suivantes :

(i) Il existe un élément de $\mathbb{C}$, noté j, qui vérifie $j^2 = -1$.

(ii) Tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de façon unique sous la forme $z = a + jb$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on dit que :

- $a + jb$ est la *forme algébrique* ou *cartésienne* de z ;
- a est la *partie réelle* de z, on note $a = \operatorname{Re} z$;
- b est la *partie imaginaire* de z, on note $b = \operatorname{Im} z$.

(iii) L'addition et la multiplication des nombres complexes sont définies par les formules suivantes :

$$(a + jb) + (a' + jb') = (a + a') + j(b + b') \quad \text{et} \quad (a + jb)(a' + jb') = (aa' - bb') + j(ab' + a'b)$$

où $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$.

2.2 Remarques

- Un nombre complexe est donc un nombre réel lorsque sa partie imaginaire est nulle. Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle est appelé *nombre imaginaire pur*.
- Notons que l'unicité de l'écriture d'un nombre complexe sous forme algébrique entraine en particulier que $a + jb = a' + jb'$ si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$.

- Considérons le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Si $z \in \mathbb{C}$ alors on dit que le point M de coordonnées $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$ est le point d'*affixe* z ; on dit aussi que M est l'*image* de z dans le plan. Notons que si M est le point du plan d'affixe $z \in \mathbb{C}$ alors le symétrique de M par rapport à O est le point M' d'affixe $-z$.

- L'addition et la multiplication des nombres complexes sont
  - commutatives *i.e.* $z + z' = z' + z$ et $zz' = z'z$ pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$;
  - associatives *i.e.* $z + (z' + z'') = (z + z') + z''$ et $z(z'z'') = (zz')z''$ pour tous $z, z', z'' \in \mathbb{C}$.

  De plus, la multiplication est distributive par rapport à l'addition *i.e.* on a
  $$z(z' + z'') = (zz') + (zz'') \text{ pour tous } z, z', z'' \in \mathbb{C}.$$
  De plus, 0 et 1 sont des éléments neutres pour l'addition et la multiplication respectivement *i.e.* on a $z + 0 = z$ et $z \times 1 = z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. On a aussi clairement $z \times 0 = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

2.3 Proposition

Soit $z \in \mathbb{C}$, on écrit $z = a + jb$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

(i) Le nombre z admet un *opposé* qui est $-z = (-a) + j(-b)$.

(ii) Si z est non nul alors z admet un *inverse* qui est $z^{-1} = \frac{1}{z} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} + j\dfrac{-b}{a^2 + b^2}$.

2.4 Remarques

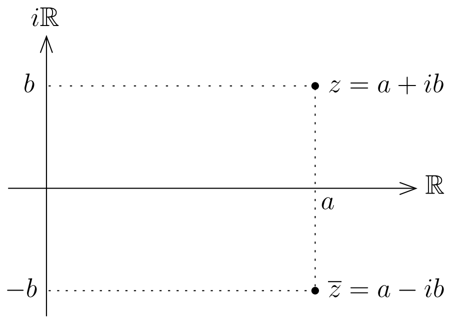
- Un produit de nombres complexes est nul si et seulement si l'un des termes est nul. En particulier, pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$,
- Le fait d'employer des signes $-$ ne doit pas faire perdre de vue que les nombres complexes n'ont pas de signe ! Par exemple, quel signe pourrait-on attribuer à j : si on avait $j \geqslant 0$ ou $j \leqslant 0$, alors on devrait avoir $j^2 \geqslant 0$ alors que $j^2 = -1$.

2.5 Définition

Soit $z \in \mathbb{C}$, on écrit $z = a + jb$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
On appelle *conjugué* de z, le nombre complexe noté $\overline{z}$ et défini par $\overline{z} = a - jb$.

2.6 Remarque

Considérons le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Si M est le point du plan d'affixe $z \in \mathbb{C}$ alors le symétrique de M par rapport l'axe des abcisses est le point M' d'affixe $\overline{z}$.



2.7 Proposition

Soit $z, z' \in \mathbb{C}$.

(i) $\overline{\overline{z}} = z$;

(ii) $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$ et $z - \overline{z} = 2j \operatorname{Im} z$;

(iii) $z\overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$ est un nombre réel positif ou nul ;

(iv) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$;

(v) $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$;

(vi) si $z \neq 0$ alors $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$;

(vii) le nombre z est réel si et seulement si $z = \overline{z}$.

2.8 Définition

On appelle *module* de $z \in \mathbb{C}$, le nombre réel positif ou nul noté $|z|$ et défini par $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$.

2.9 Remarques

- Si on écrit $z = a + jb$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Si z est réel alors le module de z correspond à sa *valeur absolue* ce qui lève toute ambiguïté concernant la notation $|\ |$.
- Considérons le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Si M est le point du plan d'affixe $z \in \mathbb{C}$ alors $|z|$ représente la distance entre les points O et M.
  Plus généralement, si M est d'affixe z et N est d'affixe ζ alors la distance entre M et N est $|z - \zeta|$.
  Considérons $\omega \in \mathbb{C}$ et $\rho > 0$, on note $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \ ;\ |z - \omega| = \rho\}$. Les points M du plan dont l'affixe est un élément de Γ constituent le cercle de centre Ω et de rayon ρ. En particulier, on appelle *cercle trigonométrique* l'ensemble des points du plan dont l'affixe est dans l'ensemble $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \ ;\ |z| = 1\}$; par abus de langage, on dit aussi que $\mathbb{U}$ est le cercle trigonométrique.

2.10 Proposition

Soit $z, z' \in \mathbb{C}$.

(i) $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$;

(ii) $|z| = |\overline{z}| = |-z|$;

(iii) $|zz'| = |z|\,|z'|$ et $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$ lorsque $z \neq 0$;

(iv) $|\operatorname{Re} z| \leqslant |z|$ et $|\operatorname{Im} z| \leqslant |z|$

(v) $||z| - |z'|| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

2.11 Remarque

La relation (v) s'appelle l'*inégalité triangulaire*. Notons que l'on a aussi (en remplaçant z' par $-z'$)

$$\big||z| - |z'|\big| \leqslant \left|z - z'\right| \leqslant |z| + \left|z'\right| .$$

Considérons un triangle ABC du plan et un repère orthonormal $(A, \vec{u}, \vec{v})$. On note z l'affixe de B et z' l'affixe de C. L'inégalité triangulaire affirme que $|z - z'| \leqslant |z| + |z'|$ *i.e.* la distance BC est inférieure ou égale à la somme des distances AB et AC. On a donc montré que, dans un triangle, la longueur d'un côté est majorée par la somme des longueurs des deux autres côtés. C'est bien entendu ce résultat qui est à l'origine de la terminologie d'inégalité triangulaire.

3 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Tout d'abord, on admet que l'on peut définir une fonction

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto u(x) = e^{jx} = \exp(jx)$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- $e^{j(x+y)} = e^{jx}e^{jy}$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$;
- $e^{jx}e^{-jx} = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
- $e^{jx} \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
- $\overline{e^{jx}} = e^{-jx}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
- $\left|e^{jx}\right| = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$\boxed{e^{jx} = \cos x + j \sin x.}$$

Cela revient à définir

- la fonction cosinus $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{Re}\left(e^{jx}\right)$;
- la fonction sinus $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{Im}\left(e^{jx}\right)$.

Enfin, il existe un nombre réel π tel que l'on ait :

$$e^{jx} = 1 \text{ si et seulement s'il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = 2k\pi.$$

On montre que l'application $u : \mathbb{R} \to \mathbb{U}, \theta \mapsto u(\theta) = e^{j\theta}$ est bijective de l'ensemble $[0, 2\pi[$ (ou $]-\pi, \pi[$) sur $\mathbb{U}$.

3.1 Proposition et Définition

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = |z|\, e^{j\theta}$.

(i) On dit que θ est *un argument* de z.

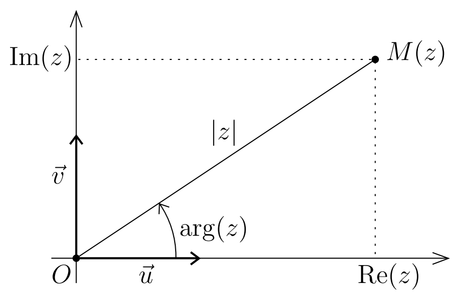
(ii) Il existe un unique argument de z dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$, on l'appelle *l'argument principal* de z et on le note $\arg(z)$.

(iii) Les arguments de z sont les nombres réels de la forme $\arg(z) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

On dit que 0 n'a pas d'argument.

3.2 Remarque

Considérons le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit M un point du plan d'affixe z, on note θ l'argument principal de z, alors l'abcisse de M est $|z| \cos\theta$ et l'ordonnée de M est $|z| \sin\theta$.



Le nombre θ est donc une *mesure* de l'*angle orienté* formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{OM}$.

3.3 Exemples

- $\arg(z) = 0$ si et seulement si z est un réel strictement positif.
- $\arg(z) = \pi$ si et seulement si z est un réel strictement négatif.
- $\arg(z) = \pm\frac{\pi}{2}$ si et seulement si z est imaginaire pur.
- Soit $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}$ alors $z = \cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4} = e^{j\frac{\pi}{4}}$ *i.e.* $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$.

Pour simplifier l'énoncé qui suit, on note $a \equiv b\ [2\pi]$ pour indiquer qu'il existe un entier k tel que $a = b + 2k\pi$.

3.4 Proposition

Soit $z, z' \in \mathbb{C}^*$, alors

(i) $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$;

(ii) $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv \arg(z') - \arg(z)\ [2\pi]$ d'où, en particulier, $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$;

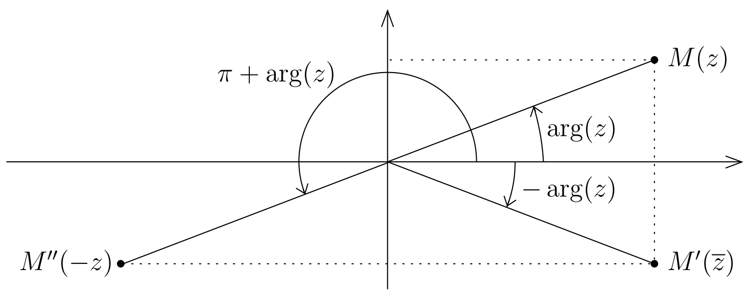
(iii) pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\arg(z^k) \equiv k\arg(z)\ [2\pi]$;

(iv) $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)\ [2\pi]$;

(v) $\arg\left(\overline{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$.

3.5 Remarque

Il faut prendre garde au fait que l'on manipule des congruences entre les arguments principaux. En effet, considérons le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et un point M d'affixe z.



Par exemple, l'argument principal de $-z$ n'est, dans ce cas de figure, non pas $\arg(z)+\pi$ mais $\arg(z)-\pi$.

3.6 Définition

Une écriture sous *forme trigonométrique* d'un nombre complexe non nul z est une expression de la forme $z = \rho e^{j\theta}$ avec $\rho > 0$ et θ un argument de z.

On écrit aussi souvent $z = \rho\big(\cos\theta + j\sin\theta\big)$ pour $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Du fait de la définition même des arguments d'un nombre complexe, pour écrire un nombre complexe z sous forme trigonométrique, il convient tout d'abord de déterminer son module. Si $z = a + jb$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, on écrit

$$z = \sqrt{a^2+b^2}\Big(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + j\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big).$$

Comme on a $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \in [-1,1]$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \in [-1,1]$ et $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, on peut alors chercher $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

3.7 Exemples

- Soit $z = 1 + j$, on a $|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, puis $z = |z|\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
- Soit $z = (-1+j)^4$ alors $\arg(z) = \pi$.
  En effet, puisque $|-1+j| = \sqrt{2}$, on a $-1+j = |-1+i|\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ *i.e.*

$$-1+j = |-1+j|\left(\cos\frac{3\pi}{4} + j\sin\frac{3\pi}{4}\right) = |-1+j|\,e^{j\frac{3\pi}{4}}$$

  d'où

$$z = (-1+j)^4 = \left(|-1+j|\,e^{j\frac{3\pi}{4}}\right)^4 = |-1+j|^4\,e^{3j\pi} = |z|\,e^{3j\pi}$$

  donc 3π est un argument de z d'où $\arg(z) = \pi$.